

Символическая динамика в плоской задаче трех тел*

Р. Мёкель

School of Mathematics, University of Minnesota
Minneapolis, MN 55455, USA
E-mail: rick@math.umn.edu

Получено 7 июля 2007 г.

Для плоской задачи трех тел построено хаотическое инвариантное множество. Орбиты в этом инвариантном множестве проявляют много подходов вплотную к тройному столкновению, а также уходы в окрестность бесконечности. Доказательство существования основано на нахождении соответствующих «окон» в фазовом пространстве, которые под действием отображений Пуанкаре, определяемых потоком, вытягиваются, пересекая друг друга поперек.

Цитата: Р. Мёкель, Символическая динамика в плоской задаче трех тел, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 3, с. 297–330. [Original publication: R. Moeckel, Symbolic dynamics in the planar three-body problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, № 5, pp. 449–475.]

Ключевые слова: небесная механика, задача трех тел

R. Moeckel

Symbolic dynamics in the planar three-body problem

A chaotic invariant set is constructed for the planar three-body problem. The orbits in the invariant set exhibit many close approaches to triple collision and also excursions near infinity. The existence proof is based on finding appropriate “windows” in the phase space which are stretched across one another by flow-defined Poincaré maps.

Citation: R. Moeckel, Symbolic Dynamics in the Planar Three-Body Problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, No. 5, pp. 449–475. [Russian version: *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 3, pp. 297–330.]

Keywords: Celestial Mechanics, three-body problem

MSC 2000: 70F10, 70F15, 37N05, 76Bxx

* Впервые опубликовано в специальном выпуске журнала *Regular and Chaotic Dynamics*, посвященном 150-летию со дня рождения А.М. Ляпунова.

1. Введение

1.1. Формулировка результатов

Рассмотрим движение трех точечных масс m_1 , m_2 , m_3 в плоскости под действием их взаимного гравитационного притяжения. Это движение может быть описано гамильтоновой динамической системой с тремя степенями свободы. В этой статье будут использованы методы симплиcticской динамики для доказательства существования решений этой гамильтоновой системы, которые проявляют весьма интересное качественное поведение. Типы рассматриваемых поведения изображены на рисунке 1.

Первый тип поведения — это приближение вплотную к тройному столкновению. В 1767 г. Эйлер нашел простые решения задачи трех тел, для которых характерны тройные столкновения и в прямом, и в обратном времени [10]. Он обнаружил, что если три тела расположены на прямой в точности правильным образом, то если они реализуются с нулевой начальной скоростью, то они гомотетически стягиваются к тройному столкновению. Расположение зависит от упорядочения масс вдоль прямой и от отношения масс. С точностью до вращения и подобия существует ровно три таких специальных конфигурации, по одной для каждого (отличного от другого) расположения масс вдоль прямой. Лагранж обнаружил, что такое же движение происходит, если частицы расположены в равностороннем треугольнике (независимо от масс). С точностью до вращения и подобия существует две равносторонние конфигурации, отличающиеся тем, в каком порядке встречаются массы в равностороннем треугольнике — против часовой стрелки или по часовой стрелке. Эти пять специальных конфигураций называются *центральными конфигурациями*. Каждая центральная конфигурация порождает семейство периодических решений с ненулевым кинетическим моментом; они показаны на рисунке 1. Вдоль такого решения каждая масса описывает кеплерову эллиптическую орбиту. Треугольник, образованный тремя массами, вращается и изменяет размер, но всегда остается подобным исходной центральной конфигурации. Когда кинетический момент мал, эллипсы являются очень вытянутыми, и поэтому массы проходят близко к тройному столкновению. Как мы увидим далее, эти частные периодические решения отнюдь не являются единственными представляющими интерес решениями вблизи столкновений. Спрашивается, что бы произошло, если бы начальные условия, приводящие к одному из лагранжевых или эйлеровых решений, были немного возмущены. Решения, построенные ниже, показывают, что возможно большое разнообразие поведения.

Второй тип качественного поведения, рассматриваемого здесь, — это уход «в окрестность бесконечности». В отличие от задачи двух тел, закон сохранения энергии не накладывает ограничений на размер треугольника, образованного тремя массами. Выражение «в окрестность бесконечности» означает, что длина наибольшей стороны треугольника очень большая. В случае отрицательной энергии, рассматриваемом здесь, это может случиться только так, как изображено на рисунке 1; две массы остаются на ограниченном расстоянии друг от друга, а третья масса удаляется от них. В этой ситуации две близлежащие массы будем называть *двойкой* (*двойной звездой*), а оставшуюся массу будем называть просто *третьей массой*. Решения в окрестности бесконечности могут быть классифицированы в соответствии с поведением расстояния между третьей массой и центром масс двойки (длинная пунктирная линия на рисунке 1). Эту величину будем называть *сепарацией*, а ее производную — *скоростью сепарации*. Если скорость сепарации достаточно большая, то сепарация будет стремиться к бесконечности. Скорость сепарации приближается к пределу. Если этот предел положителен, решение называется *гиперболическим*; если он равен нулю, решение называется *параболическим*. С другой стороны, скорость сепарации может быть недостаточной для того, чтобы преодолеть притяжение двойки и третьей

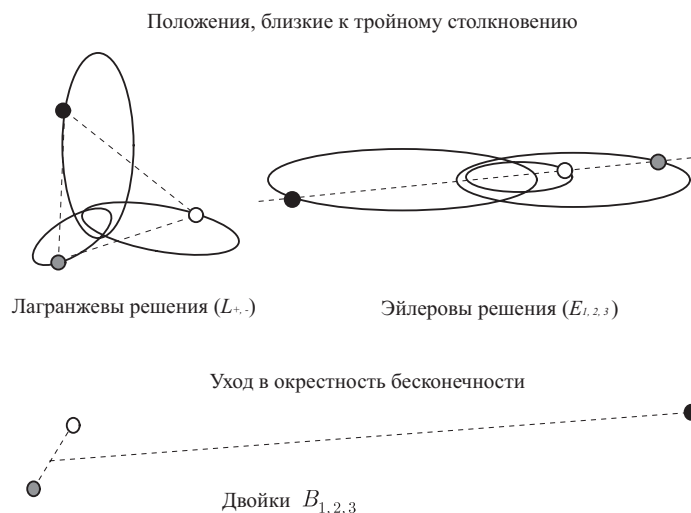


Рис. 1. Типы рассматриваемых поведений

массы. В этом случае сепарация достигает максимума, затем двойка и третья масса приближаются друг к другу. Такое решение называется *эллиптическим*.

Введем некоторую терминологию, чтобы описать решения, для которых характерны такие уходы в окрестность бесконечности. *Орбита разбегания* — это решение, для которого сепарация между двойкой и третьей массой ограничена в обратном времени и стремится к бесконечности в прямом времени. Аналогично *орбита захвата* — это решение, для которого сепарация ограничена в прямом времени, и стремится к бесконечности в обратном времени. Решение, для которого сепарация становится бесконечной в обоих направлениях времени (возможно, с различными третьими массами), называется *разлетающимся решением*. Наконец, решение, которое имеет бесконечную последовательность эллиптических уходов в окрестность бесконечности, таких что последовательность максимальных сепараций стремится к бесконечности, называется *осциллирующим решением*. Конечно, это только определения, и из них не вытекает, что решения такого типа действительно существуют. Одна из главных целей данной статьи состоит в том, чтобы показать, что все эти типы поведений действительно встречаются.

Мы будем использовать символическую динамику, для того чтобы доказать существование инвариантного множества для плоской задачи трех тел, которая содержит:

- эйлеровы и лагранжевы периодические решения;
- бесконечное множество других периодических решений, проявляющих приближение вплотную к тройному столкновению;
- гомоклинические и гетероклинические орбиты, соединяющие эти периодические решения;
- решения захвата, разбегания, осциллирующие решения, которые являются гетероклиническими между бесконечностью и любой ограниченной, находящейся вблизи столкновения орбитой из инвариантного множества;
- разлетающиеся решения с произвольными третьими массами (возможно, различными при $t \rightarrow \pm\infty$) и с произвольно большими ограниченными частями.

Чтобы ввести символическую динамику, нужно построить набор «блоков» или «окон» и определяемые потоком отображения Пуанкаре, которые вытягивают блоки друг поперек друга

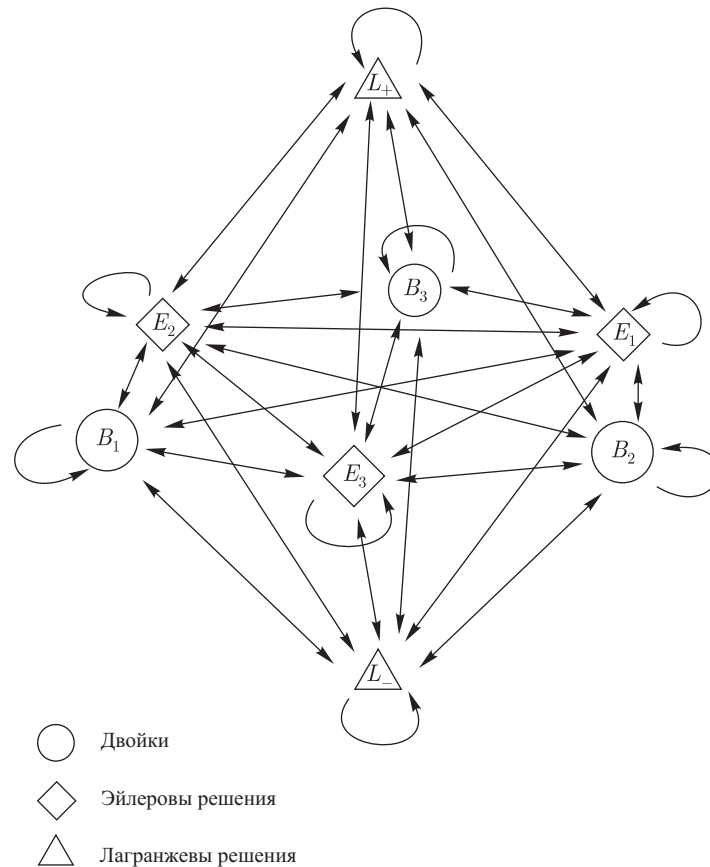


Рис. 2. Граф блоков и отображений Пуанкаре

соответствующим образом. Как только это происходит, плоская задача с фиксированной энергией и кинетическим моментом может быть редуцирована к динамической системе на пятимерном многообразии. Блоки будут четырехмерными кубами, трансверсальными потоку. Как только блоки и отображения Пуанкаре построены, отсюда немедленно следует существование большого инвариантного множества: для произвольной заданной последовательности блоков такой, что каждая пара последующих блоков связана отображением Пуанкаре, существует решение плоской задачи трех тел, которое *реализует последовательность* в том смысле, что решение проходит через блоки в заданном порядке. Поведение между блоками однозначно определяется отображениями Пуанкаре.

Блоки и отображения Пуанкаре, которые будут использоваться, показаны на рисунке 2. На этом рисунке изображен направленный граф, который имеет восемь вершин и множество ребер. Вершины представляют блоки, которые будут использованы в построении, а ребра представляют отображения Пуанкаре, соединяющие эти блоки. Последовательности блоков и отображений определяют пути на графе. Обозначения вершин соответствуют обозначениям на рисунке 1. Вершины, обозначенные через L_{\pm} , представляют малые четырехмерные блоки на многообразии постоянной энергии и кинетического момента, трансверсальные к лагранжевым периодическим решениям. Таким образом, любое решение в инвариантном множестве, которое соответствует пути на графе, проходящему через одну из этих вершин, должно проходить через такой блок, и поэтому, в силу непрерывности относительно начальных условий, должно вести себя какое-то время подобно одному из лагранжевых периодических решений с большим эксцентриситетом. Верши-

ны, обозначенные через E_j , представляют блоки, построенные близко (но не пересекая) к другим трем классическим периодическим решениям. Решение, представленное путем на графе, содержащим такую вершину, будет вести себя подобно одной из коллинеарных периодических орбит с большим эксцентриситетом, а тела будут находиться далеко от положения их наилучшего сближения. Далее в окрестности точки вблизи их столкновения они возвращаются к почти равно-сторонней конфигурации. Вершины B_j представляют блоки в окрестности бесконечности, здесь нижний индекс указывает на третью массу. Эти блоки будут построены таким образом, что решение, соответствующее пути на графе, который проходит через такую вершину несколько раз подряд, будет надолго уходить в окрестность бесконечности, то есть максимальная сепарация будет большой. Более того, если путь, проходящий через такую вершину, бесконечно зацикливается, то соответствующее решение будет стремиться параболически к бесконечности. Таким образом, выбирая соответствующие пути на графе, можно получать все возможные различные качественные поведения, описанные выше (и многие другие).

Более подробную информацию о том, как себя ведут решения в инвариантном множестве, дают определенные здесь отображения Пуанкаре. В частности, стрелки, соединяющие эйлеровы и лагранжевы вершины на рисунке 2, представляют одно приближение вплотную к тройному столкновению. Таким образом, если путь содержит такую стрелку, то соответствующее решение приближается к тройному столкновению вблизи одной центральной конфигурации, уклоняется от столкновения и появляется вблизи другой центральной конфигурации.

Построение блоков и отображения Пуанкаре зависит от нескольких лемм, при доказательстве которых требуются определенные ограничения на массы и на кинетический момент. Более точно, массы должны выбираться так, чтобы определенные собственные значения были не вещественными и определенные многообразия были трансверсальными. Однако никаких условий малости на массы здесь нет. Кроме того, кинетический момент должен быть малым настолько, чтобы эйлеровы и лагранжевы орбиты проходили достаточно близко к тройному столкновению. В действительности доказательство получается возмущением случая нулевого кинетического момента. Эти ограничения в свое время будут введены.

Результаты этой работы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Рассмотрим плоскую задачу трех тел с фиксированными отрицательной энергией и кинетическим моментом, в которой произведена редукция по сдвигам и поворотам и регуляризованы двойные столкновения. Если кинетический момент не равен нулю, но достаточно мал и если массы выбираются из определенного большого открытого множества, то каждый путь на рисунке 2 реализуется по крайней мере одним решением. Кроме того, каждый периодический путь реализуется по крайней мере одним периодическим решением.*

1.2. Некоторые исторические сведения

Чтобы поместить настоящую статью в контекст, необходимо напомнить некоторые ранее известные результаты. Как уже было упомянуто ранее, центральные конфигурации были открыты в восемнадцатом веке Эйлером и Лагранжем [10, 13].

Исследование тройных столкновений было начато Зундманом [33] и продолжено Зигелем [30, 29]. МакГихи ввел координаты, описанные ниже в параграфе 2, которые заменили сингулярность тройного столкновения на инвариантное граничное многообразие. Все трехстолкновительные решения стремятся к этому многообразию. Он использовал эти координаты для качественного исследования коллинеарной задачи трех тел [16, 17]. Некоторые авторы применяли эти координаты для изучения другого частного случая: плоской равнобедренной задачи трех

тел [5, 6, 11, 12, 18, 31]. В частности, в работах [6, 18] была введена символическая динамика в этой задаче в случае нулевого кинетического момента. Автор исследовал орбиты вблизи столкновения в плоской задаче трех тел в работе [22]. Символическая динамика, введенная в той работе, соответствует части рисунка 2, которая не содержит вершин B_j .

Осциллирующие орбиты, орбиты захвата и орбиты разбегания были исследованы Ситниковым и Алексеевым в частном случае трехмерной задачи трех тел, которая теперь называется задачей Ситникова [32, 1, 2, 3]. Это подсистема, которая возникает, когда одна масса движется вдоль оси, а две другие равные массы движутся симметрично вокруг этой оси. Ситников исследовал частный случай этой системы, когда тело на оси имеет нулевую массу, и доказал существование осциллирующих орбит, орбит захвата и орбит разбегания. Геометрические соображения для использования символической динамики содержатся в [24]. В этом подходе применяется другая система координат МакГихи (см. параграф 2), для того чтобы приклеить двумерное граничное многообразие в бесконечности к трехмерному многообразию постоянной энергии. Все параболические и гиперболические орбиты стремятся к этому граничному многообразию. В частности, существует одна периодическая орбита в бесконечности, к которой стремятся все параболические орбиты. МакГихи показал, что параболические решения образуют аналитические устойчивое и неустойчивое многообразия этой периодической орбиты [15]. Введение символической динамики возможно в силу существования трансверсальных пересечений этих многообразий, то есть в силу того, что существует трансверсальная гомоклиническая орбита к параболической бесконечности. Аналогичный подход был использован в других подсистемах с двумя степенями свободы, таких как коллинеарная задача и ограниченная плоская задача [14, 34].

Попытки обобщить этот подход на плоскую задачу были затруднены в силу дополнительных степеней свободы. Геометрическое исследование поведения в окрестности бесконечности в плоской задаче было начато Истоном и МакГихи [9]. Здесь граничное многообразие в бесконечности — четырехмерное. Параболические орбиты плоской задачи трех тел — это устойчивое и неустойчивое многообразия инвариантной трехмерной сферы внутри этого граничного многообразия. Причина того, что это — инвариантная трехмерная сфера, а не периодическая орбита, как в задаче Ситникова, состоит в том, что она представляет все возможные предельные движения двойки, когда расстояние до третьей массы приближается к бесконечности. Это множество предельных движений совпадает с множеством всех движений двух тел с фиксированной энергией; после регуляризации Леви—Чивита оно становится трехмерной сферой. И устойчивое, и неустойчивое многообразия этой сферы являются четырехмерными. Истон показал, что эти многообразия липшицевы [7]. Робинсон показал, что они являются аналитическими вдали от трехмерной сферы в бесконечности и имеют гладкость C^∞ на трехмерной сфере. Далее он показал, что орбиты на этих инвариантных многообразиях сходятся к одной орбите двух тел на этой сфере [26, 27]. В работах [9] и [26] было показано, что для плоской задачи может быть введена символическая динамика, если найдется соответствующая гомоклиническая орбита к инвариантной трехмерной сфере. Гомоклиническая орбита должна удовлетворять трем условиям. Во-первых, она должна быть асимптотической к одной и той же орбите двух тел на трехмерной сфере и в прямом, и в обратном времени. Во-вторых, она должна представлять трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий трехмерной сферы. Третье условие требуется в силу невырожденности потока на инвариантной трехмерной сфере. Как известно, поток двух тел с фиксированной отрицательной энергией полностью состоит из периодических орбит одного и того же периода. Таким образом, отображение Пуанкаре двумерного сечения вдоль любой заданной орбиты — это тождественное отображение. Третье требование на гомоклиническую орбиту состоит в том, что два нейтральных направления должны быть гиперболически вытянуты на протяжении части гомоклинического движения вдали от бесконечности. К сожалению,

нет никакой возможности строго проверить это третье предположение, хотя определенный прогресс был достигнут с помощью численных выкладок [8, 25]. (Другой подход для доказательства существования осциллирующих орбит см. в работе [35].)

В работе [20] автор рассмотрел задачу Ситникова с малым кинетическим моментом. Комбинирование техники, используемой для задачи с нулевым кинетическим моментом (которая в действительности является плоской равнобедренной задачей), и техники, используемой для исследования периодических орбит в окрестности бесконечности, сделало возможным введение символической динамики для описания инвариантного множества, содержащего и приближение вплотную к столкновению, и уходы в окрестность бесконечности. В настоящей статье используется тот же самый подход для плоской задачи. Хотя этот подход не включает в себя непосредственно построение гомоклинической орбиты к параболической бесконечности, существование такой орбиты следует из теоремы 1. Сложности, касающиеся двух нейтральных направлений в бесконечности, преодолеваются с помощью гиперболического растяжения, произведенного вблизи тройного столкновения.

Как уже было упомянуто, части рисунка 2 и теоремы 1, которые имеют отношение исключительно к орбитам вблизи столкновения, были уже доказаны в работе [22]. Таким образом, главная цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, как включить уходы в окрестность бесконечности в эту картинку.

2. Координаты и уравнения движения

В этом параграфе будут выписаны уравнения движения для плоской задачи трех тел в нескольких системах координат. Кроме того, будут заданы константы движения и будет введено коллинеарное инвариантное многообразие.

2.1. Декартовы координаты

В задаче трех тел рассматривается движение трех точечных масс m_1, m_2, m_3 , двигающихся под действием их взаимного гравитационного притяжения. В этой статье мы рассматриваем движение частиц на плоскости. Пусть $q_j \in \mathbb{R}^2$ обозначают их положения, $p_j = m_j \dot{q}_j \in \mathbb{R}^2$ — их импульсы. Обозначим $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^6$ и $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^6$. Тогда движение описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T A^{-1} p - U(q),$$

где q и p понимаются как вектор-столбцы, верхний индекс T означает операцию транспонирования, A означает 6×6 -матрицу $\text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$, а $U(q)$ — это ньютонова потенциальная функция:

$$U(q) = \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|} + \frac{m_1 m_3}{|q_1 - q_3|} + \frac{m_2 m_3}{|q_2 - q_3|}.$$

Уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= A^{-1} p, \\ \dot{p} &= U_q. \end{aligned}$$

Эти уравнения задают динамическую систему на пространстве $\mathbb{R}^6 \setminus \Delta \times \mathbb{R}^6$, где $\Delta = \{q : q_i = q_j \text{ для некоторых } i \neq j\}$.

С помощью известных интегралов движения задачу можно свести к потоку в пятимерном пространстве. Без ограничения общности можно положить полный импульс равным нулю:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.$$

Тогда центр масс будет постоянным, и его можно выбрать в нуле:

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0.$$

Далее можно зафиксировать кинетический момент

$$p_1 \times q_1 + p_2 \times q_2 + p_3 \times q_3 = \omega$$

и энергию

$$H(q, p) = h < 0.$$

Эти уравнения определяют шестимерное подмножество в $\mathbb{R}^6 \setminus \Delta \times \mathbb{R}^6$, которое мы будем обозначать через $\widetilde{M}(h, \omega)$. Наконец, существует симметрия вращения. Если проигнорировать угловую переменную, соответствующую вращению всех положений и импульсов, то можно получить пятимерную систему. Другими словами, можно перейти к динамической системе на пятимерном фактор-многообразии $M(h, \omega)$.

2.2. Координаты вблизи тройного столкновения

Чтобы изучить движение вблизи тройного столкновения, удобно ввести новые переменные, которые предложил МакГихи [17]. Во-первых, пусть

$$r = \sqrt{q^T A q}$$

означает квадратный корень из момента инерции. Поскольку центр масс лежит в начале координат, эта величина характеризует размер треугольника, образованного тремя телами. В частности, $r = 0$ представляет тройное столкновение. Далее, введем нормированные переменные положения и импульса:

$$\begin{aligned} s &= \frac{q}{r}, \\ z &= \sqrt{r} p. \end{aligned}$$

После умножения уравнений на $r^{\frac{3}{2}}$ и перехода к новой временной шкале $' = r^{\frac{3}{2}}$ уравнения примут вид

$$\begin{aligned} r' &= vr, \\ s' &= A^{-1}z - vs, \\ z' &= U_s(s) + \frac{1}{2}vz, \end{aligned}$$

где $v = s^T z$, а «'» означает дифференцирование по новому параметру времени. Однородность U используется для замены $U(q)$ на $U(s)$. Уравнения, которые определяют $\widetilde{M}(h, \omega)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 &= 0, \\ s^T A s &= 1, \\ \frac{1}{2} z^T A^{-1} z - U(s) &= hr, \end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$\sqrt{r} [z_1 \times s_1 + z_2 \times s_2 + z_3 \times s_3] = \omega. \quad (2.2)$$

Эти уравнения расширяют векторное поле до $\{r = 0\}$. Существует два подмножества множества $\{r = 0\}$, которые подходят для изучения орбит вблизи столкновения. По теореме Зундмана [33] тройные столкновения могут происходить только при $\omega = 0$. Посмотрим, что происходит с уравнением (2.2) в этом случае. Пусть Ω означает $z_1 \times s_1 + z_2 \times s_2 + z_3 \times s_3$. Тогда многообразие $\widetilde{M}(h, 0)$ задается следующим образом:

$$\widetilde{M}(h, 0) = \{(r, s, z) : r > 0, \text{ выполнено (2.1), } \Omega = 0\}.$$

Таким образом, множество

$$\widetilde{C} = \{(0, s, z) : \text{ выполнено (2.1), } \Omega = 0\}$$

— это отчасти граничное многообразие для $\widetilde{M}(h, 0)$ в тройном столкновении. Это есть так называемое многообразие столкновений. Здесь существует профакторизованный вариант многообразия столкновений, который мы обозначаем через C . Многообразие C является четырехмерной границей пятимерного многообразия $M(h, 0)$. Поток на многообразии C отражает поведение орбит с нулевым кинетическим моментом вблизи столкновения.

Заметим, однако, что система (2.1) может быть решена без требования $\Omega = 0$. Пусть

$$\widetilde{M}_0 = \{(0, s, z) : \text{ выполнено (2.1), } \Omega \geq 0\}.$$

Обозначим профакторизованный вариант этого многообразия через M_0 . Тогда M_0 — это пятимерное подмножество множества $\{r = 0\}$, которое является подходящим для изучения поведения орбит вблизи столкновения с положительным кинетическим моментом. M_0 — это многообразие с границей; границей является C . Взаимосвязь многообразий $M(h, \omega)$, $M(h, 0)$, M_0 и C схематически показана на рисунке 3.

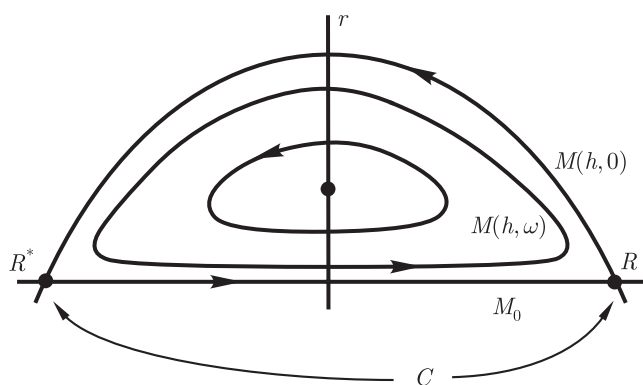


Рис. 3. Многообразия столкновений и цикл точек покоя

Этот рисунок на самом деле иллюстрирует последовательность периодических орбит в $M(h, \omega)$, сходящихся к циклу точек покоя в $M(h, 0) \cup M_0$ при $\omega \rightarrow 0$. Это будет объяснено далее в параграфе 3.

2.3. Координаты в окрестности бесконечности

Когда сепарация двойки и третьей массы становится большой, то можно ожидать, что влияние третьей массы на двойку будет незначительным. Поэтому поток вблизи бесконечности в $M(h, \omega)$ интуитивно можно понимать как произведение кеплерова движения двойки и движение третьей массы относительно центра масс двойки. В этом параграфе введены координаты, которые отражают это расщепление. В дальнейшем мы будем использовать m_3 в качестве «третьей массы», а также часто будем использовать константы $\mu = m_1 + m_2$ и $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Здесь уместно ввести якобиевы переменные, как показано на рисунке 4. Более точно, пусть

$$\begin{aligned}x &= q_2 - q_1, \\z &= q_3 - \mu q_1 - \mu_2 q_2,\end{aligned}$$

где $\mu_j = \frac{m_j}{\mu}$. Пусть $\xi = \dot{x}$ и $\zeta = \dot{z}$. Тогда дифференциальные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \xi, \\ \dot{\xi} &= \alpha^{-1} U_x, \\ \dot{z} &= \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \beta^{-1} U_z,\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\alpha = \frac{m_1 m_2}{\mu}$, $\beta = \frac{m_3 \mu}{M}$ и

$$U(x, z) = \frac{m_1 m_2}{|x|} + \frac{m_2 m_3}{|z - \mu_1 x|} + \frac{m_1 m_3}{|z + \mu_2 x|}.$$

Уравнение энергии в этих координатах имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} (\alpha |\xi|^2 + \beta |\zeta|^2) - U(x, z) = h.$$

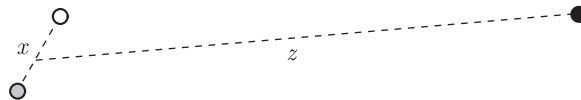


Рис. 4. Якобиевы переменные

Далее мы введем координаты (снова следуя МакГихи [15]), которые продолжают поток на граничное многообразие в бесконечности. Пусть

$$z = \rho^{-2} e^{i\theta}, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

Разложим ζ на радиальную и угловую составляющие:

$$\zeta = \nu \left(\frac{z}{|z|} \right) + \widehat{\omega} \left(\frac{z}{|z|} \right)_{\perp}.$$

Тогда в фактор-многообразии $M(h, \omega)$ мы можем проигнорировать θ и исключить $\widehat{\omega}$, используя интеграл кинетического момента. Получатся уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\frac{1}{2} \nu \rho^3, \\ \dot{\nu} &= -M \rho^4 + O(\rho^6),\end{aligned} \tag{2.4}$$

которые описывают движение третьей массы m_3 относительно двойки, и уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \xi, \\ \dot{\xi} &= -\frac{\mu x}{|x|^3} + O(\rho^4),\end{aligned}$$

которые описывают движение двойки.

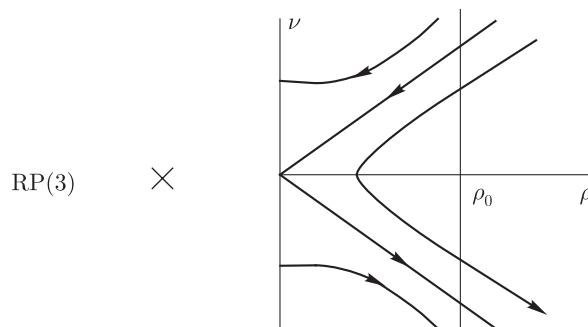


Рис. 5. Окрестность бесконечности

Для наименьшего порядка по ρ поток является произведением простого потока в плоскости (ρ, ν) и потока задачи двух тел (см. рисунок 5). Четырехмерное инвариантное многообразие $\{\rho = 0\}$ соответствует $|z| = \infty$. Здесь движение (x, ξ) в точности описывается задачей двух тел. А именно фиксирование значения $\nu = \nu_0$ соответствует фиксированию предельной скорости сепарации третьей массы от двойки в бесконечности, и соответствующее движение (x, ξ) дает задачу двух тел с отрицательной энергией. Теперь задача двух тел с фиксированной отрицательной энергией и регуляризованными двойными столкновениями эквивалентна геодезическому потоку на единичном касательном расслоении круговой двумерной сферы [23]. Это расслоение есть в точности $RP(3)$. Если используется альтернативная регуляризация Леви–Чивита, то это эквивалентно потоку Хопфа на S^3 [9]. Здесь будет использована $RP(3)$ -регуляризация. Таким образом, окрестность бесконечности в $M(h, \omega)$ диффеоморфна подмножеству вида $0 \leq \rho \leq \rho_0$ в (ρ, ν) -полуплоскости, пересеченному с $RP(3)$. Важно понять, какие свойства произведения потоков на рисунке 5 сохраняются в такой окрестности, когда принимаются во внимание члены по ρ высших порядков. Результаты Истона, МакГихи и Робинсона показывают, что важнейшие свойства сохраняются. Эти результаты будут обсуждены в 4 параграфе.

2.4. Коллинеарное подмногообразие

В коллинеарной задаче трех тел рассматривается движение трех точечных масс на фиксированной прямой. Эта задача может быть рассмотрена как подсистема плоской задачи с нулевым кинетическим моментом. В действительности существуют три такие подсистемы C_j с точностью до вращений; здесь нижний индекс указывает, какая масса лежит между двумя другими на прямой. Такие трехмерные подсистемы были исследованы МакГихи [16]. Они сыграют важную роль в этой статье. В этом параграфе координаты, введенные выше, будут приспособлены для коллинеарного случая. Обозначим положения частиц через $q_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, \dots, 3$ где $q_1 < q_2 < q_3$.

2.4.1. Окрестность коллинеарной бесконечности

Для исследования орбит, которые стремятся к бесконечности, при условии, что m_1 и m_2 образуют двойную систему, удобно ввести якобиевы переменные такие же, какие были введены

выше. Дифференциальные уравнения будут иметь вид (2.3), где x , ξ , z и ζ теперь скалярные величины.

Переменные МакГихи вблизи бесконечности — это $\rho = \frac{1}{\sqrt{z}}$ и $\nu = \zeta$. Коллинеарный аналог уравнений (2.4) следующий:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\frac{1}{2}\nu\rho^3, \\ \dot{\nu} &= -M\rho^4 \left[\frac{\mu_2}{(1 - \mu_1 x \rho^2)^2} + \frac{\mu_1}{(1 + \mu_2 x \rho^2)^2} \right].\end{aligned}\quad (2.5)$$

Уравнения для x и ξ будут приблизительно такими же, как и уравнения для коллинеарной задачи двух тел с отрицательной энергией. Коллинеарная задача двух тел — это очень простая задача; после регуляризации двойных столкновений относительными движениями масс m_1 и m_2 являются периодические ограниченные колебания с повторяющимися отскоками. Таким образом, вместо $RP(3)$ на рисунке 5 будет присутствовать одна периодическая орбита. Если мы отбросим, так же как и ранее, члены высших порядков, то поток на трехмерном многообразии энергии будет иметь вид такой, как на рисунке 6.

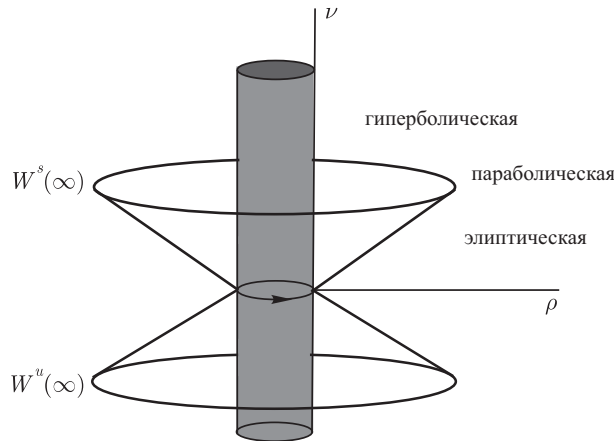


Рис. 6. Окрестность коллинеарной бесконечности

2.4.2. Окрестность коллинеарного столкновения

Вблизи тройного столкновения введем переменные (r, v, θ, w) :

$$\begin{aligned}r^2 &= \alpha x^2 + \beta z^2, \\ \sqrt{r}v &= \alpha x\xi + \beta z\zeta, \\ \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{z}{x}, \\ \sqrt{r}w &= \sqrt{\alpha\beta}(x\zeta - z\xi).\end{aligned}$$

Переменная r — это снова квадратный корень из момента инерции, а θ описывает относительные расстояния между массами на прямой. Значение $\theta_{23} = \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{m_1 m_3}{M m_2}})$ представляет двойное столкновение масс m_2 и m_3 , а $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$ представляет двойное столкновение масс m_1

и m_2 . Смысл переменных v и w понятен из дифференциальных уравнений, написанных ниже. После умножения на $r^{\frac{3}{2}}$ дифференциальные уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} r' &= vr, \\ v' &= \frac{1}{2}w^2 + hr, \\ \theta' &= w, \\ w' &= V'(\theta) - \frac{1}{2}vw, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$V(\theta) = \frac{m_1 m_2 \sqrt{\alpha}}{\cos \theta} + \frac{m_1 m_3 \sqrt{\alpha \beta}}{\sqrt{\alpha} \sin \theta + \mu_2 \sqrt{\beta} \cos \theta} + \frac{m_2 m_3 \sqrt{\alpha \beta}}{\sqrt{\alpha} \sin \theta - \mu_1 \sqrt{\beta} \cos \theta}.$$

Уравнение энергии будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}(v^2 + w^2) - V(\theta) = hr.$$

Поведение функции $V(\theta)$ показано на рисунке 7. Эта функция сингулярна в двойных столкновениях, между ними она выпукла вниз и имеет единственную критическую точку $\theta = \theta_c(m_1, m_2, m_3)$. Это значение θ соответствует единственной эйлеровой центральной конфигурации для этих масс [10].

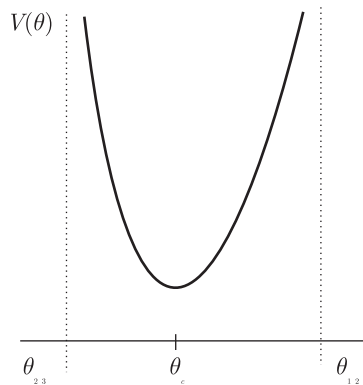


Рис. 7. Потенциал коллинеарной задачи

Уравнения (2.6) по-прежнему имеют сингулярности двойных столкновений, но они могут быть исключены с помощью следующей аналитической замены координат. Заменим w на $\hat{w} = wf(\theta)$, где $f(\theta) = \cos \theta (\sqrt{\alpha} \sin \theta - \mu_1 \sqrt{\beta} \cos \theta)$, и нормируем векторное поле множителем $f(\theta)$. Тогда уравнения (2.6) примут вид

$$\begin{aligned} r' &= f(\theta)vr, \\ v' &= f(\theta)V(\theta) + 2hf(\theta)r - \frac{1}{2}f(\theta)v^2, \\ \theta' &= \hat{w}, \\ \hat{w}' &= f(\theta)^2 V'(\theta) - \frac{1}{2}f(\theta)v\hat{w} + f'(\theta)\hat{w}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

а уравнение энергии примет вид

$$K(\theta, v, \hat{w}) = \frac{1}{2} (f(\theta)^2 v^2 + \hat{w}^2) - f(\theta)^2 V(\theta) = h f(\theta)^2 r. \quad (2.8)$$

Функции $f(\theta)V(\theta)$ и $f(\theta)^2 V'(\theta)$ являются аналитическими даже в двойных столкновениях. В этих переменных трехмерное многообразие энергии можно представить себе как внутреннюю часть поверхности $K(\theta, v, \hat{w}) = 0$ в (θ, v, \hat{w}) -пространстве (см. рисунок 8). Эта поверхность в точности является многообразием коллинеарных тройных столкновений.

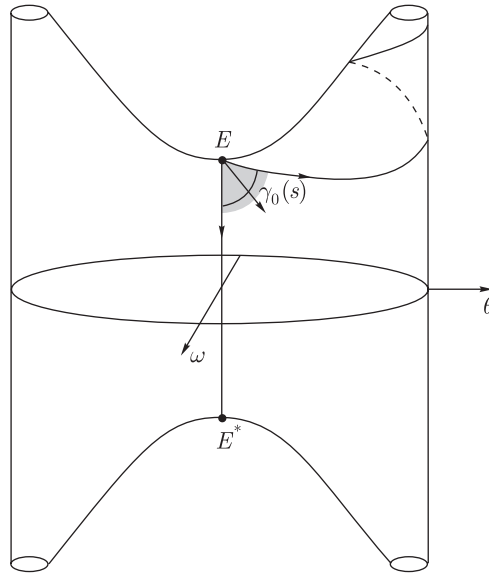


Рис. 8. Коллинеарная задача трех тел

На рисунке также изображена эйлерова гомотетическая орбита, которая соединяет точки покоя. Кроме того, рисунок иллюстрирует некоторые другие свойства, которые будут обсуждаться позже.

2.4.3. Предельный случай

Результаты, касающиеся коллинеарной задачи, которые понадобятся в дальнейшем, будут доказаны сначала для частного случая, когда центральная масса m_2 намного больше, чем две другие массы, которые предполагаются равными. Пусть $m_1 = m_3 = 1$ и $m_2 = \frac{1}{\epsilon}$, где $\epsilon > 0$. Тогда $\alpha = \frac{1}{1+\epsilon}$ и $\beta = \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}$.

Введем новую временную шкалу $' = \sqrt{\epsilon}$; и пусть $\xi = x'$ и $\zeta = z'$ теперь означают скорости относительно нового параметра времени. Тогда уравнения (2.3) примут вид

$$\begin{aligned} x' &= \xi, \\ \xi' &= \alpha^{-1} \overline{U}_x, \\ z' &= \zeta, \\ \zeta' &= \beta^{-1} \overline{U}_z, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\overline{U} = \epsilon U = \frac{1}{x} + \frac{1}{z - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} x} + \frac{\epsilon}{z + \frac{1}{1+\epsilon} x}.$$

Соотношение на энергию имеет вид

$$\frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \beta\zeta^2) - \overline{U}(x, z) = \overline{h},$$

где $\overline{h} = \epsilon h$. В пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ система (2.9) показывает, что x и z являются решениями задачи двух тел, которые связаны только тем требованием, что сумма их энергий равна \overline{h} .

Уравнения (2.5), описывающие поведение на бесконечности, теперь принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{1}{2}\nu\rho^3, \\ \nu' &= -\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}\rho^4 \left[\frac{1}{(1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}x\rho^2)^2} + \frac{\epsilon}{(1 + \frac{1}{1+\epsilon}x\rho^2)^2} \right],\end{aligned}$$

где ν — это новое ζ .

Уравнения (2.7), описывающие поведение вблизи тройного столкновения, изменятся только тем, что скорости v, w умножатся на $\sqrt{\epsilon}$ и $V(\theta)$ заменится на

$$\overline{V}(\theta) = \epsilon V(\theta) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\cos \theta} + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} \sin \theta - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \sqrt{\beta} \cos \theta} + \frac{\epsilon \sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha} \sin \theta + \frac{1}{1+\epsilon} \sqrt{\beta} \cos \theta}.$$

Уравнение энергии будет иметь вид

$$K(\theta, v, \hat{w}) = \frac{1}{2}(f(\theta)^2 v^2 + \hat{w}^2) - f(\theta)^2 \overline{V}(\theta) = \overline{h} f(\theta)^2 r.$$

Все эти уравнения аналитически зависят от ϵ даже при $\epsilon = 0$.

3. Поведение вблизи тройного столкновения

В этом параграфе будут описаны некоторые из возможных типов поведения орбит вблизи столкновения в задаче трех тел. Большинство результатов было доказано в работе [22], однако необходимо их напомнить перед тем, как исследовать уходы в окрестность бесконечности. Некоторые ограничения на массы, которые были необходимы в работе [22], будут здесь сняты.

Рисунок 3 был введен как схематическая картина многообразий тройных столкновений, однако на самом деле на этом рисунке показаны другие важные характеристики задачи трех тел: периодические орбиты и циклы точек покоя, возникающие из центральных конфигураций Эйлера и Лагранжа. Существует ровно пять центральных конфигураций с точностью до вращения и подобия. Коллинеарную, или эйлерову, конфигурацию будем обозначать через e_j , если массы упорядочены так, что в середине находится m_j . Равностороннюю, или лагранжеву, конфигурацию будем обозначать l_+ или l_- в зависимости от того, против часовой стрелки или по часовой стрелке встречаются массы m_1, m_2, m_3 , если двигаться вокруг треугольника.

Лагранж показал, что всякая центральная конфигурация порождает семейство периодических решений с ненулевым кинетическим моментом. Для фиксированных значений $h < 0$ и ω (не слишком большого) найдется ровно пять таких периодических орбит в $M(h, \omega)$, по одной для каждой центральной конфигурации (см. рисунок 1). В пределе при $\omega \rightarrow 0$ эксцентриситет этих эллиптических орбит стремится к 1, и получаются гомотетически расширяющиеся и сжимающиеся орбиты тройных столкновений.

После замены переменных и изменения временной шкалы, произведенных в параграфе 2.2, трехстолкновительные решения сходятся к точкам покоя в многообразии тройных столкновений C . Существует ровно 10 точек покоя в C , по две для каждой из пяти центральных конфигураций: $r = 0$, $s = s_c$, $z = vAs_c$, $v = \pm\sqrt{2U(s_c)}$, где $s_c \in \{l_+, l_-, e_1, e_2, e_3\}$. Точки покоя, соответствующие $s_c = l_+$, будем обозначать L_+, L_+^* , здесь звездочка означает выбор знака минус для v ; другие точки покоя будем обозначать аналогично. Эти десять точек покоя являются конечными точками пяти гомотетических орбит тройного столкновения Эйлера и Лагранжа. На рисунке 3 такая орбита показана как соединение точек покоя $R \rightarrow R^*$ в $M(h, 0)$, где $R \in \{L_+, L_-, E_1, E_2, E_3\}$. Существует также соединение $R^* \rightarrow R$ в M_0 , показанное на рисунке. Оно представляет вращающееся поведение эллиптических периодических решений ненулевого кинетического момента вблизи тройного столкновения. Интуитивно эллиптическая орбита с большим эксцентриситетом, такая как на рисунке 1, может рассматриваться как почти гомотетическое расширение вдали от столкновения и сжатие назад по направлению к столкновению, за которым следует очень быстрый поворот на 360° вблизи столкновения.

В пределе при $\omega \rightarrow 0$ эти периодические орбиты сходятся к циклу точек покоя, как на рисунке 3, где соединение точек покоя в $M(h, 0)$ представляет гомотетическое расширение и сжатие, а соединение в M_0 представляет вращение.

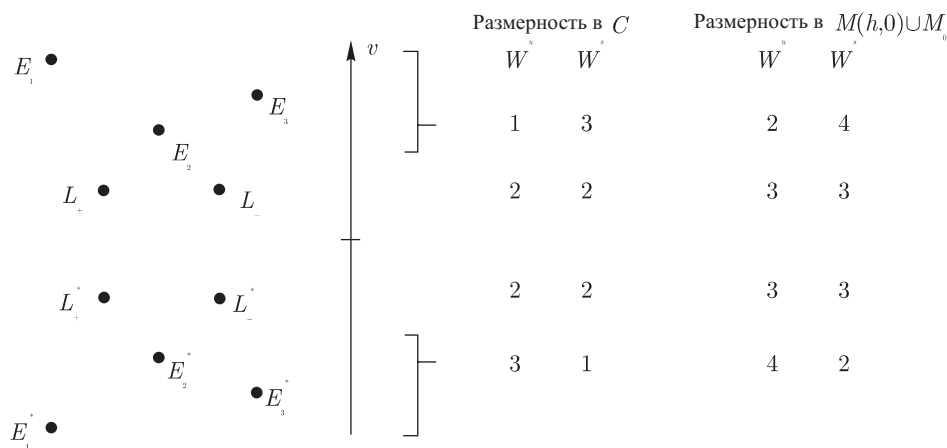


Рис. 9. Точки покоя

Точки покоя особенно важны в свете того факта, что поток на C (на самом деле даже на M_0) является градиентоподобным. Функция $v = s^T z$ строго возрастает вдоль всех нестационарных орбит. Существует множество орбит тройных столкновений кроме пяти гомотетических орбит. Тем не менее все они сходятся к множеству точек покоя в C . Все точки покоя являются гиперболическими и поэтому имеют аналитические устойчивое и неустойчивое многообразия. Орбиты, которые стремятся к тройному столкновению в прямом времени, составляют пять устойчивых многообразий $W^s(R^*)$, а орбиты, стремящиеся к тройному столкновению в обратном времени, составляют пять неустойчивых многообразий $W^u(R)$. Размерности этих устойчивых и неустойчивых многообразий приведены на рисунке 9; точки покоя упорядочены по значению v . В первом столбце приведены размерности многообразий, рассмотренных в четырехмерном многообразии столкновений C , а во втором столбце приведены размерности этих многообразий, которые рассматриваются в пятимерном многообразии с углами $M(h, 0) \cup M_0$. Глядя на рисунок 3, можно объяснить, почему и устойчивое и неустойчивое многообразие увеличиваются на одну размерность в последнем пространстве.

Рассмотрим вопрос о трансверсальности соединений точек покоя, которые составляют циклы эйлеровых и лагранжевых точек покоя. Рисунок 9 показывает, что в лагранжевом случае все устойчивые и неустойчивые многообразия имеют размерность три в пятимерном множестве $M(h, 0) \cup M_0$. Таким образом, оказывается возможным для обоих соединений точек покоя быть трансверсальными пересечениями соответствующего устойчивого и неустойчивого многообразий. Для соединений $L_{\pm} \rightarrow L_{\pm}^*$ в $M(h, 0)$ это доказали Симо и Ллибре, а для соединений $L_{\pm}^* \rightarrow L_{\pm}$ в M_0 это было доказано автором для почти всех значений масс.

Предложение 1. Для почти всех значений масс оба соединения лагранжевых точек покоя трансверсальны.

Эйлеров случай кажется более сложным. В частности, для заданных размерностей $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ не очевидно, почему соединения $E_j \rightarrow E_j^*$ в $M(h, 0)$ должны существовать. Объяснение состоит в том, что оба многообразия $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ лежат в инвариантных трехмерных коллинеарных подсистемах \mathcal{C}_j . Двумерные многообразия $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ полностью содержатся в \mathcal{C}_j . Девани показал, что эйлерово гомотетическое решение (вертикальная орбита на рисунке 8) является трансверсальным пересечением этих устойчивого и неустойчивого многообразий, рассматриваемых в \mathcal{C}_j [4].

Напомним, что \mathcal{C}_j имеет коразмерность два в $M(h, 0)$. Естественно, возникает вопрос о локальном поведении вблизи E_j, E_j^* в этих двух размерностях, дополнительных к \mathcal{C}_j . Оказывается, что для большинства значений масс собственные значения для E_j, E_j^* в этих двух направлениях являются комплексными. Они имеют отрицательную вещественную часть в E_j и положительную вещественную часть в E_j^* . Таким образом, поток вблизи E_j, E_j^* стремится к спирали вокруг многообразия \mathcal{C}_j коразмерности два. Такое движение по спирали также сыграет важную роль в дальнейшем. Нормированные массы, для которых появляется такое вращение по спирали, указаны на рисунке 10, который основан на [28].

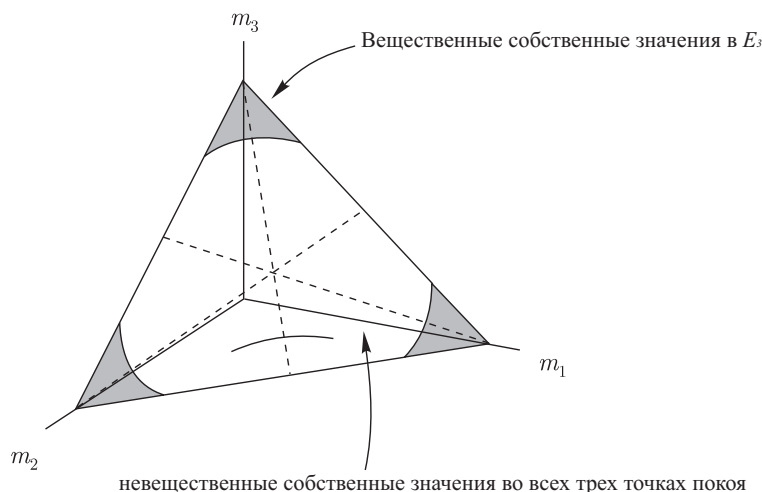


Рис. 10. Треугольник масс ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$)

Также важными являются соединения между точками покоя в \mathcal{C} . В этой статье нас интересуют только соединения среди точек покоя со звездочкой и среди точек покоя без звездочки. В силу свойства градиентоподобия и того факта, что многообразия $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ лежат в коллинеарных подмногообразиях \mathcal{C}_j , единственными возможными соединениями являются соединения между лагранжевыми точками покоя и эйлеровыми точками покоя. Следующий результат

показывает, что все они имеют место.

Предложение 2. Для почти всех значений масс существует по крайней мере одно трансверсальное соединение из каждого L_{\pm} в каждое E_j и из каждого E_j^* в каждое L_{\pm}^* в C .

В действительности в работе [19] было показано, что всегда существует по крайней мере одно топологически трансверсальное соединение, а в работе [22] было показано, что предложение верно, когда две массы почти равны. Случай равных масс является более простым в силу существования еще одного инвариантного подмногообразия в $M(h, 0)$. А именно в этом случае существует инвариантное множество \mathcal{I}_j орбит, для которых конфигурация всегда является равнобедренным треугольником с массой m_j , лежащей на оси симметрии. Существует многообразие равнобедренных столкновений размерности два, и трехмерное равнобедренное подмногообразие можно представить себе как его внутренность. После регуляризации двойных столкновений оно выглядит так, как на рисунке 11. Из свойства градиентоподобия следует, что существуют единственные соединения между лагранжевыми и эйлеровыми точками покоя в \mathcal{I}_j . В работе [22] было показано, что они являются трансверсальными, даже если их рассматривать в четырехмерном многообразии C . Это было доказано при помощи рассмотрения вариационных уравнений вдоль соединяющих орбит. Оказывается, что предложение 2 следует из этого результата из соображений аналитичности, которые сейчас будут приведены.

Рассмотрим вопрос о соединениях из L_{\pm} в E_j . В четырехмерном многообразии столкновений C выберем трехмерное множество уровня функции Ляпунова v между уровнями точек L_{\pm} и E_j . В этом множестве уровня многообразие $W^s(E_j)$ имеет размерность 2, а $W^u(L_{\pm})$ является кривой. По результатам работы [19] многообразие $W^u(L_{\pm})$ должно пересекать все три эйлеровых устойчивых многообразия, поэтому оно не содержится полностью в $W^s(E_j)$. Отсюда следует в силу аналитичности устойчивого и неустойчивого многообразий, что существует не более чем конечное множество соединений из L_{\pm} в E_j . Как уже было упомянуто ранее, в случае двух равных масс существует единственное соединение в равнобедренном подмногообразии \mathcal{I}_j , и это соединение является трансверсальным. В силу симметрии число неравнобедренных соединений должно быть четным; действительно, \mathcal{I}_j — это заданное многообразие очевидной инволюции многообразия C , и эта инволюция устанавливает образование пар неравнобедренных соединений. Отсюда следует, что когда две массы равны, то должно быть нечетное число трансверсальных соединений из L_{\pm} в E_j . Покажем теперь, что это последнее свойство имеет место для почти всех масс. В частности, должно существовать по крайней мере одно трансверсальное соединение, как утверждалось в предложении 2.

Рассмотрим аналитическую кривую масс $m_j(s)$, $-1 < s < 1$, подобную той, что изображена на рисунке 10. Более точно, допустим, что две массы равны, когда $s = 0$, и что кривая симметрична относительно прямой равных масс. Покажем, что существует не более чем конечное множество значений s , для которых число трансверсальных соединений из L_{\pm} в E_j четно. Этого будет более чем достаточно для доказательства предложения.

Необходимо провести локальный анализ каждого нетрансверсального соединения. Допустим, что для некоторого параметра s_0 существует такое соединение. Локально многообразие $W^s(E_j)$ может быть представлено как множество нулей аналитической функции, зависящей аналитически от s , а $W^u(L_{\pm})$ как параметризованная кривая с параметром t . Поэтому их пересечение задается нулями вещественной аналитической функции $\Phi(s, t)$. По подготовительной теореме Вейерштрасса существует $\delta > 0$ и нормированный (со старшим коэффициентом, равным 1) многочлен $P^s(t)$ с коэффициентами, которые являются вещественными аналитическими функциями переменного s , такой что для $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ множество нулей функции $\Phi(s, t)$ сов-

падает с множеством нулей многочлена $P^s(t)$. Пусть k означает поле частных кольца функций, которые являются вещественными аналитическими в некоторой окрестности s_0 . Это поле содержит все вещественные ряды Лорана, сходящиеся в некоторой выколотой окрестности точки s_0 . Тогда многочлен Вейерштрасса $P^s(t)$ является элементом области $k[t]$ с однозначным разложением на множители полиномов над полем k . Поэтому его можно разложить следующим образом:

$$P^s(t) = \prod_{k=1}^m Q_k^s(t)^{\lambda_k},$$

где $Q_k^s(t)$ — это различные неприводимые, нормированные полиномы в $k[t]$, а λ_k — положительные целые числа. Дискриминант неприводимого полинома вида $Q_k^s(t)$ — это ненулевой элемент поля k , то есть нетривиальный ряд Лорана по s . Кроме того, поскольку старший коэффициент никогда не обращается в ноль, значение этого дискриминанта в фиксированной точке s_1 равно обычному дискриминанту вещественного полинома $Q_k^{s_1}(t)$. Отсюда следует, что значения s , для которых $Q_k^s(t)$ имеет кратный корень, являются нулями нетривиального ряда Лорана, и поэтому не могут накапливаться в s_0 . Аналогично полиномы $Q_k^s(t)$ и $Q_l^s(t)$ при $l \neq k$ имеют общий корень, только если их результат, также заданный нетривиальным рядом Лорана по s , обращается в ноль. Таким образом, выбрав δ меньше, если необходимо, мы можем считать, что все корни полинома $Q_k^s(t)$ различны. Отсюда следует, что для $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$, $s \neq s_0$ невырожденные корни полинома $P^s(t)$ в точности совпадают с корнями тех полиномов $Q_k^s(t)$, для которых $\lambda_k = 1$. Поскольку полиномы $Q_k^s(t)$ вещественные, количество вещественных невырожденных корней постоянно в каждом из промежутков $(s_0, s_0 + \delta]$ и $[s_0 - \delta, s_0)$, и разность этих двух чисел четная.

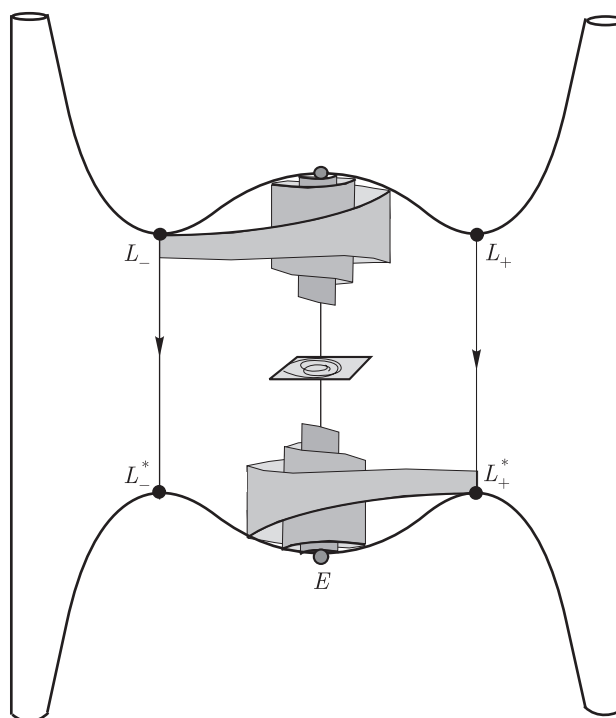


Рис. 11. Равнобедренная задача трех тел

Теперь отсюда следует, что вдоль однопараметрического семейства существует конечное множество значений s , где число трансверсальных соединений изменяется, и если удалить эти

значения, то четность числа трансверсальных соединений будет постоянной. Остается только показать, что это будет нечетное число. Для этого напомним, что при $s = 0$ число трансверсальных соединений, как известно, нечетное. Если точка $s = 0$ не является ни одной из конечного множества точек бифуркаций, то доказательство завершено. Даже если она является одной из точек бифуркаций, из симметрии однопараметрического семейства и существования инволюции, определяющей равнобедренное многообразие, следует, что число новых простых корней, созданных при удалении s от нуля, четно. Действительно, допустим, что вблизи некоторого неравнобедренного невырожденного корня число невырожденных корней изменяется от r до $r + 2k$, когда s возрастает, проходя через 0. Тогда в симметричном неравнобедренном корне произойдут изменения от $r + 2k$ до r , и поэтому полное число невырожденных корней, появляющихся из симметричной пары вырожденных корней, равно $2r + 2k$ с обеих сторон от $s = 0$. Таким образом, для всех s вблизи 0 существует нечетное число трансверсальных соединений и, следовательно, это верно для всех небифуркационных точек этого семейства.

Рисунок 11 показывает совместный эффект соединений из предложения 2 и движения по спирали вокруг коллинеарных точек покоя. Часть многообразия $W^u(L_{\pm})$ сворачивается в спираль, сходящуюся к $W^u(E_j)$. Аналогично часть многообразия $W^s(L_{\pm}^*)$ движется по спирали к $W^s(E_j^*)$. Вблизи эйлеровой гомотетической орбиты (которая лежит на обоих многообразиях $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$) существует бесконечное множество топологически трансверсальных соединений вида: $L_{\pm} \rightarrow L_{\pm}^*$. Многое из статей [21] и [22] посвящено обобщению этих результатов на плоскую задачу. Это обобщение становится возможным, как только определено соответствующим образом понятие вращающегося (движущегося) по спирали многообразия (spiralling manifold).

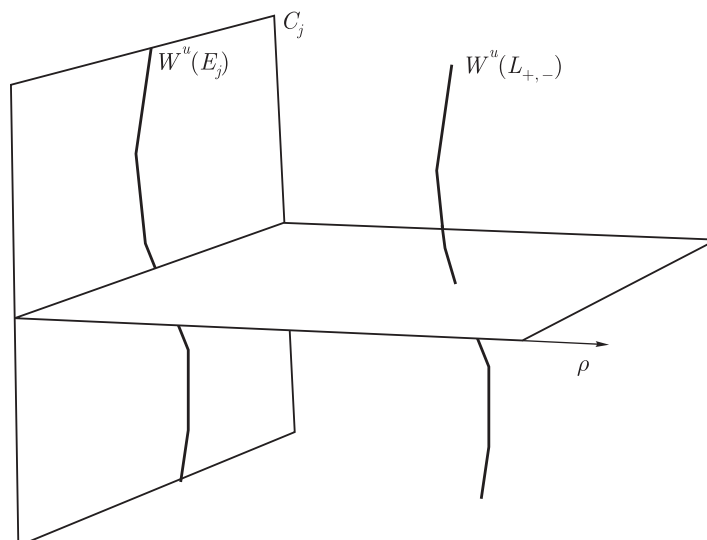
Определение, сформулированное здесь, предназначено для того, чтобы реализовать интуитивную идею о том, что вращающееся по спирали многообразие должно быть однопараметрическим семейством S_{θ} копий некоторого центрального многообразия S_{∞} , параметризованным с помощью полярной координаты θ . Полярный угол θ определен в дополнении к некоторому подмногообразию коразмерности два, вокруг которого происходит движение по спирали. Копии S_{θ} должны сходиться под контролем к S_{∞} при $\theta \rightarrow \infty$.

Точное определение, которое дается ниже, выбрано таким образом, чтобы гарантировать, что понятие спирали не зависит от выбора полярной системы координат и является инвариантным относительно диффеоморфизмов [21].

Определение 1. Пусть Z — компактное многообразие размерности $n+2$, Y — компактное подмногообразие размерности n . Предположим, что Y имеет тривиальную трубчатую окрестность такую, что можно ввести полярные координаты. Пусть S_{∞} — это компактное подмногообразие многообразия Y . Подмногообразие $S \subset Z \setminus Y$ — это **спираль вокруг Y с центром S_{∞}** , если в некоторой трубчатой окрестности U многообразия Y многообразие S можно параметризовать (в полярных координатах) как образ отображения $\sigma : S_{\infty} \times [\theta, \infty) \rightarrow U \setminus Y \times D^2$, обладающего следующими свойствами:

- σ имеет вид $\sigma(u, \theta) = (y(u, \theta), \rho(u, \theta), \theta)$;
- вложения $\sigma_{\theta}(u) = \sigma(u, \theta)$ сходятся в C^1 -топологии к включению $i : S_{\infty} \rightarrow Y$ при $\theta \rightarrow \infty$;
- $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$.

В работе [22] показано, что с учетом трансверсального соединения $L_{\pm} \rightarrow E_j$ и движения по спирали в E_j части многообразия образуют спирали вокруг коллинеарного многообразия C_j

Рис. 12. Движение по спирали $W^u(L_{\pm})$ вокруг $W^u(E_j)$

с центром $W^u(E_j)$. Несмотря на высокие размерности, возможно наглядно себе это представить. Выберем любую точку p в $W^u(E_j)$ и построим четырехмерное поперечное сечение к потоку в точке p . В этом поперечном сечении C_j будет двумерным многообразием. Введем полярные координаты (ρ, θ) в дополнительных двух размерностях. Тогда множества $\{\theta = \theta_0\}$ являются трехмерными полупространствами, как изображено на рисунке 12. Коллинеарное многообразие C_j имеет вид двумерной плоскости $\rho = 0$, и в этой плоскости неустойчивое многообразие $W^u(E_j)$ образует кривую. Согласно определению спирали части многообразия $W^u(L_{\pm})$ вблизи $\rho = 0$ будут иметь вид кривых, которые сходятся к кривой $W^u(E_j)$, когда параметр $\theta_0 \rightarrow \infty$. Объяснения по поводу горизонтальной плоскости на рисунке будут приведены позже. Картина будет одна и та же вблизи каждой точки $p \in W^u(E_j)$.

Аналогично части многообразия $W^s(L_{\pm}^*)$ вращаются по спирали к $W^s(E_j^*)$. В действительности, если точка p выбрана вдоль эйлеровой гомотетической орбиты, обе спирали появятся на одной и той же картине. Кривые, представляющие $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$, пересекаются трансверсально в точке p , и спирали двигаются в противоположных направлениях. В результате получается бесконечное множество пересечений многообразий $W^u(L_{\pm})$ и $W^s(L_{\pm}^*)$ вблизи p . Используя аналитичность, можно показать, что эти пересечения топологически трансверсальны в том смысле, что существуют C^0 -локальные координаты вблизи точек пересечения, в которых поверхности $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ имеют вид трансверсальных координатных плоскостей в \mathbb{R}^4 .

Предложение 3. Для всех значений масс таких, что E_j и E_j^* имеют комплексные собственные значения, и таких, что существуют трансверсальные соединения $L_{\pm} \rightarrow E_j$ и $E_j^* \rightarrow L_{\pm}^*$, существует бесконечное множество топологически трансверсальных соединений из каждого из L_{\pm} в каждое из L_{\pm}^* . Кроме того, они встречаются в каждой окрестности эйлерова гомотетического соединения $E_j \rightarrow E_j^*$.

Согласно предложению 2 массы, для которых условия выполнены, — это почти все массы, не принадлежащие закрашенной области, соотнесенной индексу j на рисунке 10. Таким образом, для почти всех значений масс условия будут выполнены по крайней мере для двух значений j , и для почти всех значений масс из большой незакрашенной области на рисунке 10 все три значения j допустимы.

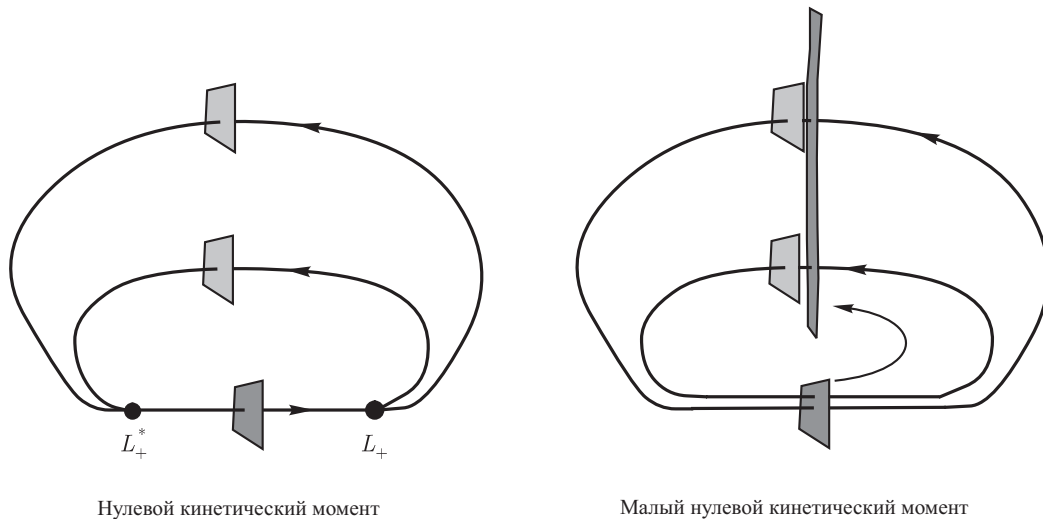


Рис. 13. Отображения Пуанкаре для блоков вблизи столкновения

Рисунок 13 — это схематичная картина многочисленных соединений между лагранжевыми точками покоя в $M(h, 0)$. Они были использованы в работе [22] как основа для введения символической динамики. Каждое соединение представляет топологически трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий. Таким образом, в четырехмерных поперечных сечениях вдоль каждой такой орбиты могут быть найдены C^0 -координаты, переводящие пересекающиеся устойчивое и неустойчивое многообразия в координатные плоскости. Четырехмерный куб в такой системе координат будет иметь два направления, совпадающих с устойчивым многообразием лагранжевой точки покоя, и другие два, совпадающих с пересекающимся неустойчивым многообразием. Отсюда следует, что, если за кубом следовать вблизи соответствующих точек покоя, он вытягивается подходящим образом.

Эта цепь вытянутых кубов порождает символическую динамику, когда добавляется малая величина кинетического момента. Это возмущение устраняет точки покоя. Поток в той окрестности, где ранее были точки покоя, переносит блоки, направление которых совпадало с устойчивым многообразием, поперек окрестности в блоки, направление которых совпадает с неустойчивым многообразием. Сосредоточив внимание на конечном числе блоков, можно доказать, что для достаточно малого, но ненулевого кинетического момента поток на $M(h, \omega)$ вытягивает каждый входящий блок поперек каждого выходящего блока так, как изображено на рисунке 13. Технические подробности этого возмущения детально обсуждались в работе [22], здесь мы не будем их повторять. Тем не менее, поскольку нам будет нужно построить дополнительные четырехмерные блоки, для того чтобы описать динамику в окрестности бесконечности, уместно будет напомнить здесь, какие свойства были необходимы для доказательства.

Четырехмерный блок — это гомеоморфный образ множества I^4 , где $I = [-1, 1]$. Рассматривая I^4 как $I^2 \times I^2$, можно разделить границу ∂I^4 на две части, $\partial_+ = \partial I^2 \times I^2$ и $\partial_- = I^2 \times \partial I^2$. Каждое из этих подмножеств является заполненным тором, и поэтому гомологически является окружностью. Такая запись должна навести на мысль, что первые две размерности вытягиваются, а последние две сжимаются под действием потока в прямом времени. Это «вытягивание» не обязательно является вытягиванием типа, обычно обсуждаемого для гиперболических динамических систем. Вместо этого используются более слабые условия, основанные на теории сингулярных гомологий. Грубо говоря, условие состоит в том, что окружность, порождающая первую гомологию части ∂_+ первого блока, переносится отображением Пуанкаре в соответствующую

порождающую второго блока; аналогично для ∂_- и для обратного отображения Пуанкаре. Доказательства, приведенные в работе [22], показывают, что если w_0 и w_1 — достаточно малые блоки, трансверсальные к потоку, такие что $\partial_+ w_0$ связано с устойчивым многообразием (которое имеет коразмерность два) лагранжевой точки покоя, а $\partial_- w_1$ связано с неустойчивым многообразием, то, когда вводится достаточно малая величина кинетического момента, w_0 вытягивается поперек w_1 под действием возмущенного потока в гомологическом смысле, описанном выше.

Результаты, приведенные в этом параграфе, составляют доказательство той части теоремы 1, которая касается путей на рисунке 2, не включающих в себя уходы в окрестности бесконечности. В последующих параграфах в цепь будут включены блоки в окрестности бесконечности. Согласно результатам, перечисленным в последнем параграфе, необходимо будет построить эти блоки так, чтобы они были достаточно малыми и чтобы они были связаны с соответствующими устойчивыми или неустойчивыми многообразиями лагранжевых точек покоя.

4. Поведение в окрестности бесконечности

В этом параграфе в схему символической динамики, описанную в третьем параграфе, будут включены движения в окрестности бесконечности.

4.1. Поток в окрестности бесконечности

В параграфе 2.3 была приведена замена переменных, которая облегчает качественное исследование потока в окрестности бесконечности. Как было упомянуто здесь, поток приближенно совпадает с произведением потока для двух тел, описывающего поведение двойки, и потока, заданного уравнениями (2.4), описывающего движение третьей массы относительно центра масс двойки. Важно понять, какие свойства произведения потоков остаются справедливыми в такой окрестности, когда учитываются связующие члены высшего порядка.

Из уравнений (2.4) вытекает, что можно выбрать ρ_0 достаточно малым, чтобы неравенства $-a\rho^4 < \dot{\nu} < -b\rho^4$ выполнялись на множестве $\{\rho < \rho_0\}$, где a и b — положительные константы. Отсюда легко получить, что любая орбита в окрестности, где $\nu(0) > 0$, принадлежит одному из следующих трех классов:

- гиперболическому: $\rho \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow \nu_0 > 0$;
- параболическому: $\rho \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$;
- эллиптическому: ρ достигает положительного минимума, а затем возрастает до ρ_0 .

Аналогичная классификация имеет место в обратном времени.

Для целей нашей работы наиболее важно понять поведение параболических орбит, то есть устойчивого и неустойчивого множеств инвариантного $RP(3)$, $\{\rho = \nu = 0\}$. Они будут обозначены $W^{s,u}(\infty)$. Рисунок 5 подсказывает нам, что эти множества являются локально четырехмерными многообразиями. Сложность в их изучении состоит в том, что вследствие множителя ρ^3 в уравнениях (2.4) инвариантное $RP(3)$ обычно не является гиперболическим. Тем не менее, используя идею, развитую МакГихи в случае двух степеней свободы, Истон смог показать, что части этих устойчивого и неустойчивого множеств при $\rho > 0$ являются липшицевыми четырехмерными многообразиями [7]. Затем Робинсон показал, что они являются вещественными аналитическими и даже класса C^∞ в точке $\rho = 0$ [26, 27]. Кроме того, он показал, что каждая орбита в $W^{s,u}(\infty)$ сходится к отдельной орбите задачи двух тел. Пространство орбит задачи двух

тел с фиксированной отрицательной энергией является двумерной сферой; точки этой двумерной сферы представляют собой возможные эллипсы, большая полуось которых определяется энергией. Таким образом, тот факт, что существует вполне определенная предельная орбита, означает, что существуют отображения $\omega^* : W^s(\infty) \rightarrow S^2$ и $\alpha^* : W^u(\infty) \rightarrow S^2$, которые ставят в соответствие каждой параболической орбите ее предельное поведение двойки. Робинсон показал, что эти отображения имеют класс C^∞ и являются вещественными аналитическими при $\rho > 0$.

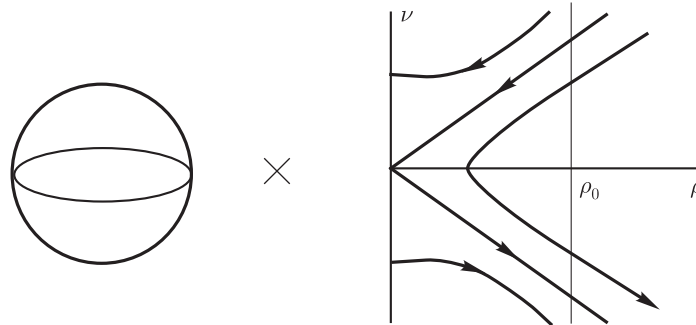


Рис. 14. Сечение Пуанкаре в окрестности бесконечности

Рассмотрим отображение Пуанкаре в окрестности орбиты в инвариантном $RP(3)$ в бесконечности. К сожалению, поток задачи двух тел на этом $RP(3)$ не имеет глобального поперечного сечения, хотя локально, конечно, такие поперечные сечения существуют. Тем не менее мы несколько злоупотребим иллюстрацией и изобразим некоторые из рисунков в дальнейшем так, как будто бы существовало S^2 , которое было глобальным поперечным сечением для потока. Это S^2 обычно отождествляется с пространством орбит задачи двух тел, поскольку каждая орбита двух тел попадает в сечение Пуанкаре в единственной точке. Поэтому четырехмерное поперечное сечение в окрестности бесконечности может рассматриваться как часть S^2 , пересеченная с полуплоскостью (ρ, ν) , как показано на рисунке 14.

В силу гладкости устойчивого и неустойчивого многообразий, можно ввести новую координату ν так, что в сечении Пуанкаре $W^{s,u}(\infty)$ станут произведениями двумерной сферы с прямыми в плоскости (ρ, ν) , как показано на рисунке. Локально каждое из этих многообразий диффеоморфно $S^2 \times [0, \rho_0)$, и в силу результатов Робинсона о гладкости α^* и ω^* они гладко расслаиваются на инвариантные кривые над двумерной сферой, как показано на рисунке 15. Отсюда следует, что существуют C^∞ -координаты (ρ, ν, z) в сечении Пуанкаре такие, что $z \in \mathbb{R}^2$ являются локальными координатами на двумерной сфере, и в $W^{s,u}(\infty)$ расслоения задаются приравниванием z константе.

Вспоминая дифференциальные уравнения (2.4), можно найти, что отображение Пуанкаре в этих координатах принимает вид:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho - \frac{1}{2}\nu\rho^3 + O(5), \\ \nu_1 &= \nu - M\rho^4 + O(5), \\ z_1 &= z + \rho^4 h(\rho, \nu, z),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $h(\rho, \nu, z)$ обращается в ноль на $W^{s,u}(\infty)$. Здесь $O(5)$ означает $O(|(\rho, \nu)|^5)$. Заметим, что, поскольку $h(0, 0, z) = 0$, отсюда следует, что $z_1 = z + O(5)$.

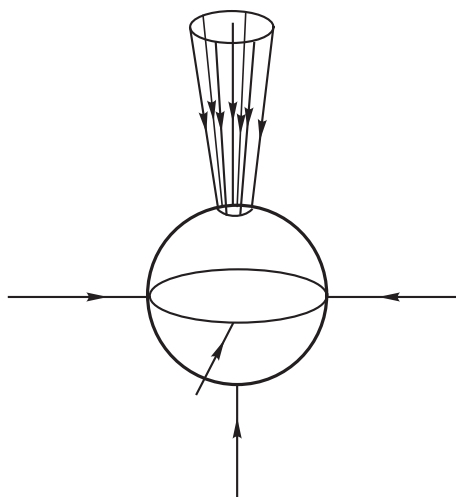


Рис. 15. Внутренность устойчивого многообразия бесконечности

4.2. Соединения между тройным столкновением и бесконечностью

Чтобы включить уходы в окрестность бесконечности в символическую динамику, необходимо найти орбиты, которые соединяют окрестность тройного столкновения с окрестностью бесконечности. В этом параграфе будут построены решения с нулевым кинетическим моментом, которые имеют тройное столкновение в одном направлении времени и стремятся параболически к бесконечности в другом направлении времени. Ввиду результатов, описанных в двух последних параграфах, такие решения могут рассматриваться как пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий точек покоя в многообразии тройных столкновений C с устойчивым и неустойчивым многообразиями инвариантного $RP(3)$ в бесконечности.

4.2.1. Соединения в коллинеарной задаче

Рассмотрим сначала одну из трех коллинеарных подсистем C_j . Вспомним из параграфа 2.4, что эти подсистемы являются трехмерными. Существует одна периодическая орбита в параболической бесконечности, и она имеет аналитические устойчивое и неустойчивое многообразия $W^{s,u}(\infty)$, которые разделяют окрестность бесконечности на эллиптическую и гиперболическую области (см. рисунок 6). Существует двумерное многообразие тройных столкновений, содержащее точки покоя E_j и E_j^* . Они являются седловыми точками, когда рассматриваются в многообразии тройных столкновений, а $W^u(E_j)$ и $W^s(E_j^*)$ являются двумерными в C_j . Они пересекаются трансверсально вдоль эйлеровой орбиты (см. рисунок 8). Поскольку инвариантные многообразия столкновения и бесконечность являются двумерными, то возможно существование изолированных трансверсальных соединений между ними.

Предложение 4. Для почти всех значений масс существует по крайней мере одна трансверсальная соединяющая орбита в $W^u(E_j) \cap W^s(\infty)$ и одна в $W^s(E_j^*) \cap W^u(\infty)$ в коллинеарной подсистеме C_j .

В силу симметрии обращения времени достаточно рассмотреть соединения от столкновения до бесконечности.

Задача будет сведена к нахождению нулей аналитической функции вдоль кривой. Первый шаг состоит в том, чтобы представить часть многообразия $W^s(\infty)$ в виде множества нулей ана-

литической функции. Пусть

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{(r, \theta, v, w) : H = h, r > 0, \theta_c \leq \theta \leq \pi/2, \sin \theta v + \cos \theta w \geq 0, w \geq 0\} \\ &= \{(x, \xi, z, \zeta) : H = h, z > 0, z \geq \kappa_c x, \zeta \geq 0, x\zeta - z\xi \geq 0\},\end{aligned}$$

где κ_c — это значение отношения z/x в эйлеровой центральной конфигурации. \mathcal{U} — это множество, где форма коллинеарной конфигурации находится между центральной конфигурацией и конфигурациями с массами m_1, m_2 , образующими тесную двойку так, что двойка становится теснее, а сепарация z между двойкой и m_3 возрастает. Это множество включает в себя часть устойчивого многообразия $W^s(\infty)$.

Вместо z, ζ или ρ, ν введем функции $F = \rho\nu$, $G = \frac{1}{2}\nu^2 - M\rho^2$. На многообразии фиксированной энергии с регуляризованными двойными столкновениями между m_1, m_2 можно параметризовать \mathcal{U} с помощью F, G, ψ , где ψ — это угол, представляющий фазу движения двойки. Часть \mathcal{U} в окрестности бесконечности будет содержаться в верхней половине ($\nu \geq 0$) рисунка 6, но с координатами F, G вместо ρ, ν . Теперь дифференциальные уравнения (2.5) показывают, что для наименьшего порядка многообразие $W^s(\infty)$ задается равенством $G = 0$. МакГихи доказал аналитичность $W^s(\infty) \cap \{\rho > 0\}$. Отсюда следует, что это многообразие можно представить как график $G = \Psi(F, \psi)$, где Ψ — это вещественная аналитическая функция, периодическая по ψ . Это представление будет иметь место для $0 < F < \delta$ при некотором $\delta > 0$. В частности, если зафиксирована константа $c \in (0, \delta)$, то $W^s(\infty) \cap \{F = c\}$ задается равенством $\Phi(G, \psi) = G - \Psi(c, \psi) = 0$. Кроме того, точки, где $\Phi > 0$, будут гиперболическими, а точки, где $\Phi < 0$, будут эллиптическими.

Следующий шаг заключается в том, чтобы следовать за частью $W^u(E)$ вперед вдоль потока к множеству уровня $\{F = c\}$. Сначала заметим, что для решений в \mathcal{U} из уравнений (2.5) следует, что производная функции F вдоль потока удовлетворяет

$$\dot{F} = -\frac{1}{2}\nu^2\rho^3 - MB\rho^5 \leq -\frac{1}{2}\rho F^2 = -\frac{1}{2}\frac{F^3}{\nu},$$

где $B > 0$ — это величина в квадратных скобках в (2.5). Отсюда следует, что F убывает вдоль решений. В \mathcal{U} величины ρ и ν также являются убывающими, и отсюда следует, что для решения в $\mathcal{U} \cap \{F \geq c\}$ существует отрицательная верхняя граница

$$\dot{F} \leq -\frac{1}{2}\frac{c^3}{\nu_0},$$

где $\nu_0 > 0$ — это начальное значение для ν . Следовательно, любое решение, где $F \geq c$, которое остается в \mathcal{U} , в конечном итоге достигает множества $\{F = c\}$. С другой стороны, решения, которые покидают \mathcal{U} , должны сделать это при $\zeta = 0$, что означает $F = 0$. Если изначально $F \geq c$, то эти решения должны также достигать $\{F = c\}$.

Рассмотрим теперь ту часть $W^u(E)$, где $\theta \geq \theta_c$ и $w \geq 0$. Заметим, что в E имеем: $\sin \theta v + \cos \theta w = \sin \theta_c v_0 > 0$, поэтому любая достаточно малая часть $W^u(E)$ также удовлетворяет $\sin \theta v + \cos \theta w \geq 0$ и поэтому лежит в \mathcal{U} (см. рисунок 8). Пусть $\gamma_0(s)$, $0 \leq s \leq 1$, — малая аналитическая кривая в $W^u(E) \setminus E$ такая, что $\gamma_0(0)$ лежит на эйлеровой гомотетической орбите и $\gamma_0(1)$ лежит в многообразии столкновений $\{r = 0\}$ (см. рисунок 8). Значения $F(\gamma_0(s))$ могут быть сделаны сколь угодно большими, если выбирать γ_0 достаточно близко к E , поскольку в координатах МакГихи выполнено

$$F = \frac{\frac{1}{\beta^4}(\sin \theta v + \cos \theta w)}{r\sqrt{\sin \theta}}.$$

Заметим, что $F \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, поэтому точка $\gamma_0(1)$ на многообразии столкновений будет исключена ниже. Если γ_0 выбрано так, что $F(\gamma_0(s)) \geq c$, $0 \leq s < 1$, то можно последовать за этими начальными условиями вперед вдоль потока, чтобы получить кривую $\gamma(s)$ в $\{F = c\}$. Далее нахождение трансверсальных соединений от E до бесконечности эквивалентно нахождению невырожденных нулей аналитической функции Φ на $\gamma(s)$.

Можно сделать, чтобы величины, включенные в эту редукцию, аналитически зависели также и от масс. Для любого выбора масс $m = (m_1, m_2, m_3)$ обозначим через γ_m кривую, построенную выше, и пусть Φ_m — аналитическая функция. Напомним, что $\Phi_m = 0$ — это часть многообразия $W^s(\infty)$, то есть это — параболические орбиты. Эллиптические орбиты удовлетворяют условию $\Phi_m < 0$, а гиперболические орбиты удовлетворяют условию $\Phi_m > 0$. Теперь $\gamma_m(0)$ представляет эйлерову орбиту, которая является эллиптической, поэтому $\Phi(\gamma_m(0)) < 0$. На другом конце $\gamma_m(1)$ лежит в многообразии столкновений. Как показано на рисунке 8, эта орбита движется по спирали вверх по одному из склонов многообразия столкновений. МакГихи показал, что близлежащие точки, не принадлежащие многообразию столкновений, стремятся к бесконечности гиперболически с большой предельной скоростью сепарации. Таким образом, $\Phi(\gamma_m(s)) > 0$ при s , достаточно близких к 1. Отсюда следует, что существуют нули функции Φ вдоль γ для всех m . Проблема заключается в том, чтобы показать, что по крайней мере один ноль является невырожденным.

Эта задача будет решена сначала в частном предельном случае, введенном в параграфе 2.4.3. В этом случае средняя масса m_2 намного больше, чем две другие массы, и динамика распадается на две отдельные коллинеарные задачи двух тел: она задается переменными (x, ξ) , которые описывают двойную систему, составленную из масс m_1 и m_2 , а другая задается переменными (z, ζ) , которые описывают движение m_3 относительно m_2 . Две задачи связаны только тем требованием, что их полная энергия фиксирована. Энергия задачи двух тел для m_3 есть $\frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{z} = G$. Очевидно, $z \rightarrow \infty$ параболически тогда и только тогда, когда энергия равна нулю. Поэтому в этом предельном случае можно найти аналитическую функцию, описывающую $W^s(\infty)$, явно: $\Phi(G, \psi) = G$. Теперь будет показано, что существует одна точка пересечения, и что это пересечение трансверсально.

Для этого предельного случая энергия G является константой движения, поэтому достаточно рассмотреть нули G на начальной кривой $\gamma_0(s)$. Достаточно аппроксимировать $W^u(E)$ ее касательной плоскостью вблизи E . Используя в качестве координат (r, v, θ, w) , имеем $E = (0, v_0, \pi/4, 0)$, где $v_0 = 2^{5/4}$. Вычисление собственных векторов в точке E показывает, что двумерная касательная плоскость к $W^u(E)$ может быть параметризована как

$$(\delta r, \delta v, \delta \theta, \delta w) = \delta v(-v_0, 1, 0, 0) + \delta w(0, 0, v_0, 1),$$

где нормированную энергию из параграфа 2.4.3. без ограничения общности можно взять как $\bar{h} = -1$. Можно выбрать

$$\gamma_0(s) \approx (0, v_0, \pi/4, 0) - \epsilon \cos s(-v_0, 1, 0, 0) + \epsilon \sin s(0, 0, v_0, 1),$$

где $\epsilon > 0$ — малая константа. Теперь

$$G = \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2}(\sin \theta v + \cos \theta w)^2 - \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

и можно найти

$$G(\gamma_0(s)) \approx \frac{1}{2}((1 + 6\sqrt{2})\operatorname{tg} s - 1).$$

Легко проверить, что эта функция имеет ровно один ноль при $0 \leq s < 1$ и он не вырожден. Аналогичное утверждение будет справедливо для точного $\gamma_0(s)$, если ϵ достаточно мало.

Далее рассмотрим массы вида $m = (1, \frac{1}{\epsilon}, 1)$, так же как в параграфе 2.4.3. Здесь было показано, что дифференциальные уравнения аналитически зависят от ϵ , даже при $\epsilon = 0$. Из исследования предельного случая, проведенного выше, следует, что для всех достаточно малых ϵ функция Φ будет иметь один ноль вдоль γ и он будет невырожденным.

Наконец, рассмотрим любое m . Оно может быть соединено отрезком прямой в пространстве масс с одним из этих частных случаев набора масс. Пусть u , $0 \leq u \leq 1$, — это параметр вдоль этого отрезка прямой. Тогда для каждого u существует аналитическая кривая $\gamma_{m(u)}$, $0 \leq s < 1$ и аналитическая функция $\Phi_{m(u)}$ такая, как описано выше. Определим аналитическую функцию двух переменных равенством $\Phi(s, u) = \Phi_{m(u)}(\gamma_{m(u)}(s))$. Тогда требуемое условие следует из соображений аналитичности, подобных тем, что были приведены в 3 параграфе. А именно невырожденные нули функции $\Phi(s, u_0)$ бифурцируют парами при изменении u_0 , и число таких нулей нечетно для всех значений u_0 , кроме конечного числа.

4.2.2. Соединения в плоской задаче

Коллинеарная задача является подсистемой плоской задачи с нулевым кинетическим моментом, поэтому соединения от тройного столкновения до бесконечности, найденные выше, можно рассматривать как часть плоской задачи. В этом параграфе будут построены близлежащие соединения от лагранжевых точек покоя до бесконечности. Они будут являться однопараметрическими семействами соединяющих орбит, двигающихся по спирали вокруг дискретного множества коллинеарных соединений.

Напомним из параграфа 3, что соединения точек покоя в коллинеарном многообразии между лагранжевыми и эйлеровыми точками покоя и комплексные собственные значения в эйлеровых точках покоя были причиной того, что часть $W^u(L_{+,-})$ образует многообразие, вращающееся по спирали вокруг коллинеарного подмногообразия, и сходится к $W^u(E_j)$ (см. рисунок 12). Теперь мы знаем, что существуют трансверсальные пересечения $W^u(E_j)$ и $W^s(\infty)$. Рассмотрим четырехмерное локальное сечение к потоку вдоль такой соединяющей орбиты. Как и в параграфе 3, следствия из вращения по спирали легче понять, если ввести полярные координаты вокруг коллинеарного многообразия коразмерности два и затем рассмотреть трехмерное полупространство, заданное фиксированным углом. Поскольку многообразие $W^s(\infty)$ имеет коразмерность один, координаты могут быть выбраны так, что это многообразие имеет вид плоскости, трансверсальной к многообразию $W^u(E_j)$, которое имеет вид кривой. Пересечение $W^u(L_{+,-})$ с этим полупространством тоже имеет вид кривой, которая приближается к $W^u(E_j)$, когда угол, определяющий полупространство, стремится к бесконечности. Эта ситуация изображена на рисунке 12. Из рисунка очевидно следует, что в каждом полупространстве существует точка трансверсального пересечения многообразий $W^u(L_{+,-})$ и $W^s(\infty)$. Взяв все эти точки вместе, можно убедиться, что существует спиральная кривая трансверсальных пересечений многообразий $W^u(L_{+,-})$ и $W^s(\infty)$. Это несложно доказать из определения спирального инвариантного многообразия.

Предложение 5. Пусть значения масс удовлетворяют условиям предложений 3 и 4. Тогда в сечении Пуанкаре каждая трансверсальная соединяющая орбита между E_j (или E_j^*) и параболической бесконечностью является центром аналитической спиральной кривой трансверсальных соединяющих орбит между $L_{+,-}$ (или $L_{+,-}^*$) и параболической бесконечностью.

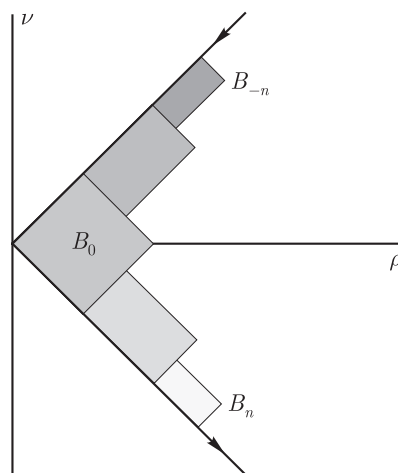


Рис. 16. Блоки в окрестности бесконечности (схематично)

4.3. Блоки в окрестности бесконечности

Для завершения доказательства остается построить четырехмерные блоки в окрестности бесконечности, которые связаны с устойчивым и неустойчивым многообразиями лагранжевых точек покоя и которые отображены соответственно один поперек другого, в то время когда они находятся в окрестности бесконечности. Истон и МакГихи [9] и Робинсон [26, 27] описали конструкцию блоков, имеющих требуемые свойства отображения в окрестности бесконечности. В этом параграфе мы подытожим эту конструкцию и произведем соответствующие модификации, для того чтобы получить связывание.

Как показано выше, окрестность бесконечности в сечении Пуанкаре является произведением части двумерной сферы и плоскости (ρ, ν) . Вспомним, что существуют координаты такие, что отображение Пуанкаре задается уравнениями (4.1). Мы пренебрегаем членами порядка $O(5)$. Тогда это отображение является произведением седлообразного отображения в плоскости (ρ, ν) и тождественного на двумерной сфере. Для этого упрощенного отображения можно построить четырехмерные блоки как произведения фиксированного блока в двумерной сфере и семейства блоков в плоскости (ρ, ν) , как показано на рисунке 16. Даже для произведения отображений существуют некоторые тонкости, возникающие в связи с тем, что отображение в плоскости (ρ, ν) не является гиперболическим. Тем не менее оно достаточно похоже на гиперболический случай, чтобы можно было произвести построение. В частности, направление, параллельное устойчивому расслоению, сжимается, а направление, параллельное неустойчивому расслоению, растягивается, и существуют инвариантные конические семейства. Другая проблема — это отсутствие вытягивания в направлениях, связанных с двумерной сферой; вместо того чтобы отображаться друг поперек друга, четырехмерные блоки точно переходят друг в друга в этих направлениях. Тем не менее этот вид отображений применим для гомологической символической динамики.

Хотя отображение Пуанкаре не является произведением, Робинсон все равно преуспел в построении этих блоков. Он сделал это, используя непрерывное инвариантное расслоение, которое сейчас будет описано (см. рисунок 17). Этот рисунок изображает двумерную сферу и поверхность $W^u(L_{+,-})$ как одномерные, но он дает хорошее представление о ситуации. Как уже было упомянуто выше, трехмерное устойчивое и неустойчивое многообразия расслаиваются на кривые точек, асимптотических к заданной орбите двойки в двумерной сфере. Хотелось бы расширить эти расслоения от параболических орбит до эллиптических орбит в окрестности беско-

нечности. Фундаментальная область для отображения Пуанкаре, ограниченная на неустойчивое многообразие, может быть утолщена до четырехмерной области. Для этого надо присоединить к каждой точке фундаментальной области кривую, трансверсальную к неустойчивому многообразию, продолженную в эллиптическую область.

Если это сделано аккуратно и продолжено по итерации обратного отображения Пуанкаре, то получится инвариантное расслоение. Это расслоение является гладким всюду, за возможным исключением $W^s(\infty)$. Используя рассуждения об инвариантном коническом семействе конусов, можно показать, что это расслоение по крайней мере непрерывно на $W^s(\infty) \setminus S^2$ в том смысле, что при приближении к точке в $W^s(\infty) \setminus S^2$ слои C^1 -сходятся к слоям в $W^s(\infty)$. Эти рассуждения перестают быть верными на двумерной сфере, поскольку матрица производных отображения (4.1) здесь является единичной, и поэтому касательная плоскость к $W^s(\infty)$ не может быть определена как единственная плоскость, остающаяся в коническом семействе при итерациях.

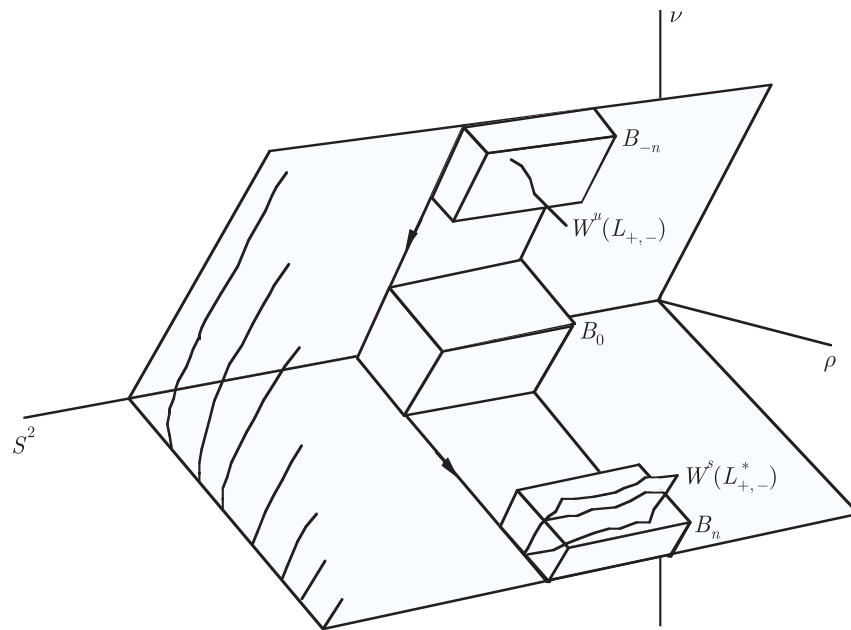


Рис. 17. Связывание блоков в окрестности бесконечности

Используя это расслоение, мы можем ввести координаты, которые делают конструкцию блоков более прозрачной. Во-первых, заменим (ρ, ν) на координаты (ξ, η) , чтобы перенести $W^s(\infty)$ в координатную плоскость $\xi = 0$, а $W^u(\infty)$ в координатную плоскость $\eta = 0$. Таким образом, (ξ, z) будут координатами на $W^u(\infty)$. Далее, пусть $(\tilde{\xi}, \tilde{z}) = \pi(\xi, \eta, z)$, где π — проекция на $W^u(\infty)$ вдоль расслоения. Тогда $(\tilde{\xi}, \tilde{z}, \eta)$ будут непрерывными координатами в окрестности бесконечности. В силу инвариантности расслоения эти координаты обладают тем свойством, что \tilde{z} инвариантна относительно итераций отображения Пуанкаре. Таким способом мы можем контролировать дрейф в направлениях S^2 .

В этих координатах построение блоков происходит почти так же, как в случае произведения отображений. Выберем произвольный блок в двумерной сфере. Множество всех точек в неустойчивом многообразии, которые проектируются в этот блок, может быть утолщено до четырехмерного бруса $0 \leq \eta \leq \delta$ над неустойчивым многообразием, и затем блоки $B_{-n}, \dots, B_0, \dots, B_n$ строятся посредством итерации этого бруса относительно обратного отображения Пуанкаре, как схематично указано на рис. 16 (более подробно см. в работе [26]).

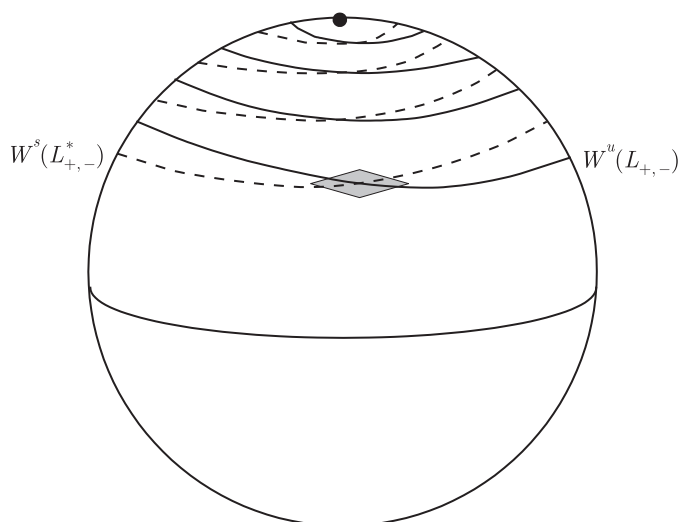
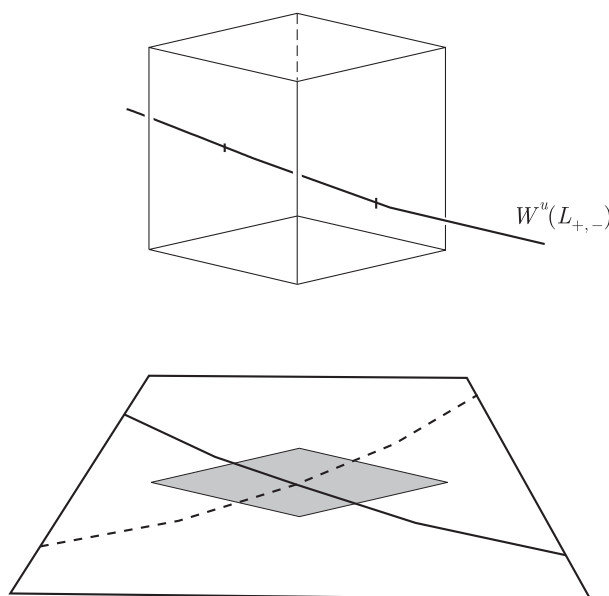


Рис. 18. Проекция гетероклинических орбит между столкновением и бесконечностью

Чтобы использовать здесь эту конструкцию, необходимо выбрать соответствующий блок в двумерной сфере. Выше было показано, что устойчивое и неустойчивое многообразия лагранжевых точек покоя пересекают устойчивое и неустойчивое многообразия параболической бесконечности в спиральных кривых. Проектирование их на двумерную сферу орбит дает аналитические спиральные кривые, сходящиеся к коллинеарной орбите двух тел, как показано на рисунке 18. Поскольку спираль, соответствующая устойчивому многообразию лагранжевой точки покоя, движется в обратном направлении от спирали, соответствующей неустойчивому многообразию, найдется бесконечное множество пересечений конечного порядка. Поэтому существует возможность построить двумерный блок на двумерной сфере, как показано на рисунке.

Рис. 19. Связывание B_{-n} с $W^u(L_{+,-})$ внутри $W^s(\infty)$

Далее необходимо убедиться, что блоки B_{-n} и B_n связаны с входящим неустойчивым мно-

гообразием и с исходящим устойчивым многообразием тройного столкновения соответственно, как показано на рисунке 17. Рассмотрим блок B_{-n} , который мы планируем связать с входящим неустойчивым многообразием тройного столкновения; другой случай является более простым. Этот блок является частью прообраза исходного четырехмерного бруса толщины δ . Этот брус расслаивается на гладкие трехмерные многообразия вида $\tilde{\xi} = c$. Используя еще раз рассуждения об инвариантном коническом семействе, можно показать, что под действием обратных итераций эти многообразия C^1 -сходятся к $W^s(\infty)$ по крайней мере вдали от двумерной сферы. Следовательно, B_{-n} может быть разложено на гладкие непрерывно изменяющиеся трехмерные слои, параметризованные параметром c . Теперь рассмотрим слой $c = 0$, то есть $W^s(\infty) \cap B_{-n}$ (см. рисунок 19). Верхняя и нижняя поверхности являются гладкими прообразами верхней части исходного бруса. Стороны определяются выбором блока в S^2 . Если последний блок достаточно мал, то, как показано на рисунке, $W^u(L_{+,-}) \cap W^s(\infty)$ выходит из блока сбоку, а не сверху или снизу. Поскольку $W^u(L_{+,-})$ — это двумерное многообразие, трансверсальное к $W^s(\infty)$, и поскольку слои, на которые B_{-n} было разложено, являются C^1 -близкими к $W^s(\infty)$, то слои многообразия $W^u(L_{+,-})$ — это гладкие кривые, непрерывно зависящие от c . Отсюда следует, что $W^u(L_{+,-})$ в B_{-n} гомеоморфно произведению рисунка 19 с интервалом. Следовательно, B_{-n} связано с $W^u(L_{+,-})$ требуемым образом.

Наконец, для того чтобы соединить динамику в бесконечности с инвариантным множеством вблизи столкновения, необходимо заменить B_{-n} на меньший блок, который может последовать назад в окрестность $L_{+,-}$. Выбор блока на двумерной сфере контролирует размер блока B_{-n} в направлении \tilde{z} , и B_{-n} может быть сделан тонким в направлении $\tilde{\xi}$ с помощью выбора малого δ . Остается сжать блок в направлении η . В силу трансверсальности пересечения $W^s(\infty) \cap W^u(L_{+,-})$ и того факта, что слои в B_{-n} близки к слоям в $W^s(\infty)$, каждый слой в B_{-n} пересекает $W^u(L_{+,-})$ не более одного раза. Другими словами, $W^u(L_{+,-}) \cap B_{-n}$ — это график над своей проекцией на $W^u(\infty)$. Продолжая этот график до графика $\eta = f(\tilde{\xi}, z)$ над проекцией блока B_{-n} на $W^u(\infty)$, а затем немного утолщая его до $\{|\eta - f(\tilde{\xi}, z)| \leq \epsilon\}$, мы получим четырехмерный блок, который является малым и который по-прежнему связан с $W^u(L_{+,-})$. Если вложение этого меньшего блока в старый блок B_{-n} рассматривать как тривиальное отображение Пуанкаре, то оно удовлетворяет гомологическим условиям, необходимым для включения его в символическую динамику. Это завершает построение всех четырехмерных блоков и доказательство теоремы.

Список литературы

- [1] Alexeev V.M., Quasirandom dynamical systems I, *Math. USSR-Sb.*, 1968, vol. 5, pp. 73–128.
- [2] Alexeev V.M., Quasirandom dynamical systems II, *Math. USSR-Sb.*, 1968, vol. 6, pp. 505–560.
- [3] Alexeev V.M., Quasirandom dynamical systems III, *Math. USSR-Sb.*, 1969, vol. 7, pp. 1–43.
- [4] Devaney R., Structural stability of homothetic solutions of the collinear n-body problem, *Cel. Mech.*, 1979, vol. 19, pp. 391–404, .
- [5] Devaney R., Triple collision in the planar isosceles 3-body problem, *Inv. Math.*, 1980, vol. 60, pp. 249–267.
- [6] Devaney R., Singularities in classical mechanical systems. In A. Katok, editor, *Ergodic Theory and Dynamical Systems I, Proceedings—Special Year, Maryland 1979–1980*, Birkhauser, Boston, 1981, pp. 211–333.
- [7] Easton R., Parabolic orbits for the planar three body problem, *JDE*, 1984, vol. 52, pp. 116–134.

- [8] Easton R., Capture orbits and Melnikov integrals in the planar 3-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 1990, vol. 50, pp. 283–297.
- [9] Easton R. and McGehee R., Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, *Ind. Jour. Math.*, 1979, vol. 28, pp. 211–240.
- [10] Euler L., De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.*, 1767, vol. 11, pp. 144–151.
- [11] Irigoyen J.M., La variété de collision triple dans le cas isoscèle du problème des trois corps., *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1980, vol. 290, pp. B489–B492.
- [12] Lacombe E. and Losco L., Triple collision in the isosceles three-body problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 3, pp. 710–714.
- [13] Lagrange J.L., *Ouvres*, vol. 6, Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- [14] Llibre J. and Simó C., Some homoclinic phenomena in the three-body problem, *JDE*, 1980, vol. 37, no. 3, pp. 444–465.
- [15] McGehee R., A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. *JDE*, 1973, vol. 14, pp. 70–88.
- [16] McGehee R., Triple collision in the collinear three body problem, *Inv. Math.*, 1974, vol. 27, pp. 191–227.
- [17] McGehee R., Singularities in classical celestial mechanics, In *Proc. of Int. Cong. Math., Helsinki*, 1978, pp. 827–834.
- [18] Moeckel R., Orbits of the three-body problem which pass infinitely close to triple collision, *Amer. Jour. Math.*, 1981, vol. 103, no. 6, pp. 1323–1341.
- [19] Moeckel R., Orbits near triple collision in the three-body problem, *Ind. Jour. of Math.*, 1983, vol. 32, pp. 221–239.
- [20] Moeckel R., Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM Jour. Math. Anal.*, 1984, vol. 15, pp. 857–876.
- [21] Moeckel R., Spiralling invariant manifolds, *Jour. Diff. Eq.*, 1984, vol. 66, pp. 189–207.
- [22] Moeckel R., Chaotic dynamics near triple collision, *Arch. Rat. Mech.*, 1989, vol. 107, no. 1, pp. 37–69.
- [23] Moser J., Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1970, vol. 23, pp. 609–636.
- [24] Moser J., *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, volume 77 of *Annals of Math. Studies*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- [25] Quillen J., *An application of the Melnikov method to the planar problem*, PhD thesis, Univ. of Colorado, 1986.
- [26] Robinson C., Homoclinic orbits and oscillation for the planar three-body problem, *JDE*, 1984, vol. 52, no. 3, pp. 356–377.
- [27] Robinson C., Stable manifolds in hamiltonian systems. In K. Meyer and D. Saari, editors, *Proceedings of the AMS Summer Research Conference on Hamiltonian Systems*, volume 81 of *Contemporary Mathematics*, Providence, AMS, 1987, pp. 77–98.
- [28] Robinson C. and Saari D., N-body spatial parabolic orbits asymptotic to collinear central configurations, *JDE*, 1983, vol. 48, pp. 434–459.
- [29] Siegel C. and Moser J., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [30] Siegel C. L., Der Dreierstos, *Ann. Math.*, 1941, vol. 42, pp. 127–168.
- [31] Simó C., *Analysis of triple collision in the isosceles problem*, Marcel Dekker, 1981, pp. 203–224.
- [32] Ситников К., Существование осциллирующих движений в задаче трех тел, *Доклады АН СССР*, 1960, т. 133, № 2, с. 303–306.

- [33] Sundman K.F., Nouvelles recherches sur le problème des trois corps, *Acta Soc. Sci. Fenn*, 1909, vol. 35, pp. 1–27.
- [34] Xia Z., Melnikov method and transversal homoclinic points in the restricted three-body problem, *JDE*, 1992, vol. 96, no. 1, pp. 170–184.
- [35] Xia Z., Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem, *JDE*, 1994, vol. 110, pp. 289–321.